الکساندر الکساندروویچ کیریلوف

دربارهٔ حد

ترجمهٔ پرویز شهریاری

الکساندر الکساندرو ویچ کیریلوف

دربارهٔ حد

ترجمهٔ پرویز شهریاری

انتشارات آزاده: روبروی دانشگاه تهران، شمارهٔ ۱۳۹۶

دربارهٔ حد
الکساندر الکساندرو ویچ کیریلوف
ترجمهٔ پرویز شهریاری
چاپ اول، ۱۳۶۳
تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ نگین

پیش گفتار

در این کتاب، دربارهٔ مفهوم حد گفتگو می‌شود، مفهومی که به‌حق، برای علاقمندان به‌ریاضیات، دشواریهایی دربر دارد. به‌خصوص، برای کسانی که دراین باره خودآموزی می‌کنند، این دشواری بیشتر می‌شود. باوجود این، تجربهٔ آموزش مکاتبه‌ای مدرسهٔ ریاضیات دانشگاه دولتی مسکو، نشان داده است که بسیاری از دانشجویان توانسته‌اند به مسأله‌های مربوط به‌حد تسلط پیدا کنند.

این کتاب، به صورت یك کتاب مساله نوشته‌شده است، ولی، در عین حال می‌تواند به‌عنوان یك کتاب درسی دربارهٔ موضوع «حد» به‌حساب آید.

مساله‌های این کتاب را، به‌سه‌دسته می‌توان تقسیم کرد. مساله‌های دستهٔ اول (که بادایره مشخص شده‌اند)، قسمت بنیانی این کتاب را تشکیل می‌دهند. حل این مساله‌ها، برای فهمیدن تعریفها و قضیه‌های اساسی، ضروری است. مساله‌های دستهٔ دوم، ضرورت حتمی ندارند: بعضی از آنها، برای روشن‌تر-شدن بعضی از قضیه‌ها مفیدند، بعضی دیگر، برای ورزیدگی فکر منطقی به کار می‌آیند و بالاخره، تعدادی ازآنها، تنها مساله‌های زیبایی هستند که حل آنها برای‌شما لذت‌بخش است. دستهٔ سوم، شامل مساله‌های دشوارتر است (که باعلامت ستاره، مشخص شده‌اند). حل این مساله‌ها، به‌آمادگی منطقی بیشتر و تسلط کامل برمفهومهای اساسی، نیاز دارد.

کسی که تنها بخواهد به مفهوم حد، در چارچوب برنامه دبیرستانی، مسلط شود، می‌تواند تنها به حل مساله‌های دستهٔ اول بپردازد. در اینصورت، حل مساله‌هایی هم که برای خودآزمایی، در صفحه‌های ۳۱ــ۳۲ گذاشته شده است. برای او مفید است.

دراین کتاب‌هم، مثل کتاب «روش مختصاتی و هندسه چهاربعدی»، از نشانه‌های «راهنمائی و رانندگی» استفاده شده است.

علامت «پارك» در جائی گذاشته شده است که شامل آگاهیهای لازم است: تعریفها، قضیه‌ها، دستورها، وغیره. در برابر این علامت، باید ایستاد و بادقت آنرا مطالعه کرد.

علامت «شیب‌تند»، درجائی گذاشته‌شده است که شامل موضوعهای دشوارتری است؛ و اگر بخواهید، می‌توانید در مطالعهٔ اول، از آن بگذرید.

در برابر علامت «پیچ‌خطرناك»، باید بادقت توجه کرد. اغلب این علامت، جائی گذاشته شده است، که درنظر اول، خیلی ساده و راحت به‌نظر می‌رسد، ولی اگر توجه کافی نشود، ممکن است منجر به‌اشتباههای جدی بشود.

بهترین راه، برای خواندن این کتاب کدام است؟ از مساله‌های مقدماتی (بند ۱)، شروع کنید. چندتا از آنهارا حل کنید و نتیجه‌ای‌راکه بدست می‌آورید باجوابی که داده شده است، مقایسه کنید. بعد، قسمت حل را بخوانید. این روش را، حتی در مواردی‌که حل مساله، برایتان ساده است، دنبال کنید، زیرا اغلب در قسمت‌حل، آگاهیهای اضافی به‌شما داده شده‌است و گاهی پرسشهای تازه‌ای آمده است.

اگر مسالهٔ رانتوانستید حل‌کنید، ابتدا به‌قسمت «راهنمائی و جواب» مراجعه‌کنید واگر، باوجوداین، درحل مساله درماندید، از قسمت «حل» کمك بگیرید.

وقتی که از عهدهٔ حل مساله‌های مقدماتی برآمدید، به‌بند بعدی کتاب بپردازید. پیش‌از آنکه مساله‌ها را حل کنید، بادقت تعریف حد را در صفحهٔ ۱۲ بخوانید.

بهتر است درباراول، از مساله‌هایی که باستاره مشخص شده‌اند، صرفنظر کنید. وقتی به‌تعریف مفهوم حدمسلط شدید و مساله‌های ساده‌تررا حل‌کردید، دوباره‌به‌آنها برگردید. به‌مساله‌های مقدماتی بند ۱، بانظر تحقیر نگاه نکنید. درنظر اول، گمان می‌رود که مساله‌های این بند، ارتباطی به موضوع «حد» ندارد. در واقع‌هم، درآنها، به‌موضوع حد، برخورد نمی‌کنیم. هدف این مساله‌ها اینست که راه تفکر منطقی را به شما بیاموزد و به شما یاد بدهد که چگونه فکر خود را بادقت بیان کنید و در تنظیم و گروه‌بندی اندیشهٔ خود، آمادگی پیداکنید. بعضی از دانش‌آموزان اعتقاد دارند‌که: ریاضیات باادبیات تفاوت دارد، در اینجا مهم اینست‌که بتوانیم روش حل مساله‌ها را پیدا کنیم، ولی اینکه این روش را چگونه بیان کنیم.و جمله‌ها و کلمه‌ها را به‌چه ترتیبی

منظم کنیم، خیلی مهم نیست. ولی، این اعتقاد، درست نیست. اغلب، ناتوانی در بیان اندیشهٔ خود، ناتوانی در حل مساله و حتی نفهمیدن فرضهای مساله را، به‌دنبال دارد.

بسیاری ازمساله‌های مقدماتی بند۱، و همینطور بقیهٔمساله‌ها را به‌شرطی می‌توانید به‌سادگی حل کنید، که به‌روشنی بدانید، چه‌چیزهایی داده شده است و چه‌چیزهایی را باید ثابت کرد. و این، همان کاری است که بعضی از دانش‌آموزان ازعهدهٔآن برنمی‌آیند. وقتی که روش حل مساله را یاد بگیرید، می‌توانید به‌خوبی وسادگی ازعهدهٔ آنها برآیید. آرزو می کنیم که‌موفق‌شوید.

ooo

بند۱ ، مساله‌های مقدماتی

۱.° از دودانش‌آموز خواسته‌شد که ادارهٔ تقویم هوارا، به‌عهده بگیرند. آنها، باید روزی را که هوا خوب است، بانشانهٔ + و روزی را که هوا بد است به‌علامت − ، مشخص کنند. دانش‌آموز اول به‌این ترتیب عمل کرد: در هرشبانه‌روز، سه‌مرتبه به‌وضع هوا توجه می‌کرد. ـ صبح، ظهر و عصر. اگر، دست‌کم در یکی ازاین زمانها، باران می‌بارید، نشانهٔ − ودرغیر این‌صورت، نشانهٔ + می‌گذاشت. دانش‌آموز دوم هم، در همان زمانها، به‌وضع هوا توجه می‌کرد؛ منتهی، اگر دست‌کم در یکی ازمواردمشاهدهٔ خود، باران نمی‌بارید، نشانهٔ + و درغیر این‌صورت، نشانهٔ − می‌گذاشت. به‌این ترتیب، وضع هوای هرروز، بایکی از حالتهای ++، +−، −+، −−، مشخص می‌شد. ولی، آیا به‌همهٔ این حالتها، می‌توان برخورد کرد؟

۲.° دانش‌آموز سومی، به‌دو دانش‌آموزمسالهٔ ۱، پیوست. اوهم، درهمان زمانهای صبح، ظهر وعصر، وضع هوارا بررسی می‌کرد، منتها نشانهٔ − را در حالتی قرار می‌داد که دست‌کم، در دومشاهدهٔ او، باران ببارد، و در حالتهای دیگر، نشانهٔ + را می‌گذاشت. از هشت حالت نشانه‌گذاری +++، ++−، +−+، −++، −+−، +−−، −−+، −−−، احتمال برخورد باکدامیک وجود دارد؟

۳.° الف) سیصد مرد، ۳۰ صف در ۱۰ ردیف ساخته‌اند. از هرصف، بلندترین مرد را برمی‌گزینیم، و از میان این ۳۰ مرد، کوتاهترین آنها را انتخاب می‌کنیم. سپس، از هرردیف، کوتاهترین مرد را برمی‌گزینیم و از میان این ۱۵ مرد، بلندترین آنهارا. کدام بلندترند: بلندترین مرد از بین کوتاه

قدها، یا کوتاهترین مرد از بین بلندقدها؟
ب) آیا جواب فرق می‌کند، اگر به‌جای اینکه افراد را به‌صورت مستطیلی قرار دهیم، به‌شکل زاویه‌ای باشند، آنطور که در شکل ۱ دیده می‌شود (در هریك از پنج‌ردیف اول ۱۰ نفر و در هریك از پنج‌ردیف دوم، ۵ نفر، ایستاده‌اند).

شکل ۱

۴.° در حالتی که روی هرنیمکت دست‌کم یك دانش‌آموز وجود داشته‌باشد که همهٔ مساله‌ها را حل کرده باشد، بازرسی تکلیفها، به ساده‌ترین صورت انجام می گیرد. حالا شما، تعریف دشوارترین نوع بازرسی تکلیفها را، تنظیم کنید.

۵.° دوتعریف، برای بازرسی آسان تکلیفها در نظر می گیریم:
الف) در هرنوبت، هرمساله را دست‌کم یکی از دانش‌آموزان حل کرده باشد،
ب) درهرنوبت، دست‌کم یکی از دانش‌آموزان، همهٔ مساله‌ها را حل کرده باشد.
آیا ممکن است، بازرسی تکلیفها به مفهوم تعریف الف) دشوار و به مفهوم تعریف ب) آسان باشد؟

۶.° در بیان‌های زیر کدامشان یکدیگر را نفی می کنند؟
۱) درهرکلاس، دست‌کم یك‌دانش‌آموز، ممتاز است.
۲) حتی درکلاس‌هم، شاگردممتاز وجود ندارد.
۳) کلاسی وجود دارد، که درآن شاگردممتاز نیست.
۴) در یکی از کلاسها، شاگرد ممتاز وجود دارد.

۷.° کدامیك از قضیه‌های زیر درست است؟
۱) اگر هرکدام از جمله‌ها بر ۷ بخش پذیر باشد، مجموع آنهاهم بر۷ بخش پذیراست.
۲) اگر هرکدام از جمله‌ها بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، مجموع آنها هم بر۷ بخش پذیر نیست.
۳) اگر دست‌کم، یکی از جمله‌ها بر۷ بخش پذیر باشد، مجموع آنها بر۷ بخش‌پذیر است.

۴) اگر مجموعی بر ۷ بخش پذیر باشد، در آنصورت هریك از جمله‌های جمع بر ۷ بخش پذیر است.
۵) اگر مجموعی بر ۷ بخش پذیر نباشد، هریك از جمله‌های جمع هم بر ۷ بخش پذیر نیست.
۶) اگر مجموعی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، دست‌کم یکی از جمله‌ها، بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

۸.° برای مثلث باضلعهای، ۵، ۱۲ و ۱۳:
الف) آیا درست است که قائم‌الزاویه است؟
ب) آیا این‌حکم، از قضیهٔ فیثاغورث نتیجه می‌شود؟

۹ . فرض کنید A و B به‌معنای دوگزاره باشند. اگر خط کوتاهی روی حرف گذاشته شود، به‌معنای نفی آن حکم است (شکل ۲). مثلا، اگر A این گزاره باشد که: «در مثلث ABC، همهٔ ضلعها برابرند»، در آنصورت گزارهٔ $\overline{A}$ چنین خواهد بود: «در مثلث ABC، همهٔ ضلعها برابر نیستند». هشت قضیه درنظر می‌گیریم:

۱. اگر A، آنگاه، B، ۵. اگر B، آنگاه A،
۲. اگر A، آنگاه B، ۶ اگر $\overline{B}$، آنگاه A،
۳. اگر A، آنگاه B، ۷ اگر B، آنگاه A،
۴. اگر A، آنگاه B ۸ اگر B، آنگاه A،

میدانیم که قضیهٔ ۱، درست است. می‌خواهیم بقیهٔ قضیه‌ها را به سه گروه تقسیم کنیم: در گروه اول قضیه‌هایی که درست‌اند؛ در گروه دوم، قضیه‌هایی که نادرست‌اند؛ و در گروه سوم، قضیه‌هایی که ممکن است درست وممکن‌است نادرست باشند. ضمناً، شرط می‌کنیم که A و B، گزاره‌های همیشه درست، یا همیشه نادرست نباشند (گزارهٔ «در مثلث ABC همه زاویه‌ها قائمه‌اند» همیشه نادرست و گزارهٔ «مثلث ABC میانه‌ها در یك نقطه به هم می‌رسند» همیشه درست‌است).

درمساله‌های زیر، از $|x|$ (به‌خوانید «قدر مطلق ایکس») استفاده‌شده‌است. مقدار $|x|$، به‌این ترتیب معین می‌شود:

حادثه‌ها

A — باران می‌بارد
$\overline{A}$ — باران نمی‌بارد
B — خورشید می‌درخشد
$\overline{B}$ — خورشید نمی‌درخشد

قضیه‌ها


اگر A، آنگاه B


اگر A، آنگاه B


اگر $\overline{A}$. آنگاه B


اگر $\overline{A}$، آنگاه $\overline{B}$

شکل ۲

$$|x|=\begin{cases} x, & (x>0 \text{ برای}) \\ 0, & (x=0 \text{ برای}) \\ -x, & (x<0 \text{ برای}) \end{cases}$$

۱۰.° عبارت $\frac{|x|}{x}$، مساوی چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۱۱.° عبارتهای زیر را، بدون علامت قدر مطلق بنویسید:

الف $|a^2|$؛

ب) $|a-b|$ ، باشرط $a>b$؛

ج) $|a-b|$ ، باشرط $a<b$؛

د) $|-a|$ ، به‌شرط منفی بودن a.

۱۲.° این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $x+2|x|=3$؛

ب) $x^2+3|x|-4=0$؛

ج) $|2x+1|+|2x-1|=2$.

۱۳.° این نامساویها را ثابت کنید:

الف $|x+y|\leqslant|x|+|y|$؛

ب) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$؛

ج) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$

روشن کنید که درهر کدام از این‌حالتها، چه‌موقع، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

۱۴°. آیادرست است که: عدد طبیعی n وجود دارد، که به‌ازای آن داشته باشیم:

الف) $\sqrt[n]{1000}<1.001$؟

ب) $\sqrt[n]{n}<1.001$؟

ج) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<0.1$؟

د) $\sqrt{n^2+n}-n<0.1$؟

۱۵. الف) آیا درست است که عددی مثل C وجود دارد، به‌نحوی که به‌ازای همهٔ مقادیر درست k ، نامساوی زیر، برقرار باشد ؟

$$\left|\frac{k^3-2k+1}{k^4-3}\right|<C$$

ب) * آیا درست است که برای هرعدد C، مجموعهٔ نامتناهی از عددهای درست k وجود دارد، به‌نحوی که نامساوی زیر برقرار باشد؟

$$k\sin k > C$$

۱۶. الف) ضلعهای یک‌مستطیل را بادقت تا یک‌سانتیمتر، اندازه گرفته‌ایم. باچه‌دقتی می‌توان محیط و مساحت مستطیل را محاسبه کرد؟

ب) ضلعهای یک مستطیل را بادقت تا ۱٪ اندازه گرفته‌ایم. باچه دقتی، می‌توان محیط و مساحت این مستطیل را پیدا کرد؟

P

می‌گوئیم که دنبالهٔ عددهای

$$x_1 ، x_2 ، \dots و x_n ، \dots$$

داده شده است، وقتی که هرعدد طبیعی[1] n، متناظر باعددی مثل x_n باشد.

مثلاً، دنبالهٔ

۱ ، ۴ ، ۹ ، ۱۶ ، ۲۵ ، . . .

را می‌توان بادستور $x_n = n^2$ مشخص کرد؛ یادنبالهٔ

$-1 ، 1 ، -1 ، 1 ، -1 ، 1 ، \dots$

با دستور $x_n = (-1)^n$ یا دستور $x_n = \cos n\pi$، مشخص می‌شود. البته، هر دنباله‌ای را نمی‌توان بایک‌دستور جبری بیان کرد به‌عنوان نمونه، دنبالهٔ

۳ ، ۱ ، ۴ ، ۱ ، ۵ ، ۹ ، ۲ ، ۶ ، ۵ ، . . .

را می‌آوریم که جملهٔ x_n آن برابر است بارقم n ام قسمت دهدهی عدد π.

۱۷. ° بزرگترین‌جملهٔ دنباله‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ ؛

ب) $x_n = \dfrac{n}{100+n^2}$ ؛

ج) $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.[2]

---

۱) عدد طبیعی، یعنی عدد درست ومثبت.

۲) $n!$ نشانهٔ کوتاه حاصضرب $1\times 2\times 3\times \dots \times n$ است وبنابرتعریف $1! = 1$

۱۸.° کوچکترین جملهٔ دنباله‌های زیر را پیدا کنید:

الف) $x_n = n^2 - 5n + 1$؛

ب) $x_n = n + \frac{100}{n}$؛

ج) $x_n = n + 5 \sin\frac{n\pi}{2}$،

دنبالهٔ $\{x_n\}$[1] را کرانه‌دار گویند، وقتی‌که عددی مانند C وجود داشته‌باشد، که برای هراندیس n، نامساوی $|x_n| \leqslant C$ برقرار باشد (شکل۳).

شکل ۳

۱۹.° تعریف دنبالهٔ بی‌کرانه را منظم کنید.

۲۰.° دربارهٔ دنبالهٔ کرانه‌داری فکر کنید که:

الف) بزرگترین و کوچکترین جمله داشته‌باشد؛

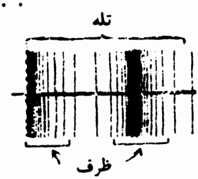
ب) بزرگترین جمله داشته‌باشد، ولی کوچکترین جمله نداشته‌باشد؛

ج) کوچکترین جمله داشته‌باشد، ولی بزرگترین‌جمله نداشته‌باشد؛

د) نه‌بزرگترین جمله و نه کوچکترین جمله نداشته باشد.

فرض کنید، دنبالهٔ نامتناهی $\{x_n\}$ داده شده‌باشد. جمله‌های این‌دنباله‌را، به‌کمك نقطه‌هایی، روی‌محور عددها، نشان می‌دهیم (ضمناً ممکن است، بعضی از جمله‌های دنباله، در یك‌نقطه قرار بگیرند؛ مثلا در دنبالهٔ

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$$



شکل ۴

همهٔ‌جمله‌های ردیف زوج،روی نقطهٔ ۱ ، قرار می گیرند). فاصلهٔ بستهٔ $[a ، b]$ روی محور عددی را برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ،تله می‌نامیم، وقتی‌که یا درخارج این فاصله، جمله‌ای از دنباله وجود نداشته باشد و یا تعداد چنین جمله‌هایی محدود باشد.

فاصلهٔ بستهٔ $[a ، b]$ روی محور عددی را برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، ظرف می‌نامیم، وقتی که دراین فاصله، مجموعهٔ نامتناهی از جمله‌های دنباله وجود

۱) نشانهٔ $\{x_n\}$، نشانه کوتاه دنبالهٔ ... ، x_1 ، x_2 ، ... ، n_n ، ... است.

داشته‌باشد (شکل ۴).

۲۱.° الف) ثابت کنید که هر تله‌ای، ظرف‌هم هست؛

ب) دنباله‌ای فکر کنید، و فاصلهٔ بسته‌ای پیدا کنید که برای این دنباله ظرف باشد، ولی تله نباشد.

۲۲.° این دنباله‌ها

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$

b) $1, 2, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 1\frac{1}{n}, \ldots,$

c) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots, 2n-1, \frac{1}{2n}, \ldots,$

وفاصله‌های بستهٔ

A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$

B) $[-1, 1]$

C) $[-2, 2],$

داده شده است. ببینید کدام فاصله برای کدام دنباله، تله یا ظرف است؟

۲۳.° آیا دنباله‌ای وجود دارد که برای‌آن، هریک‌از فاصله‌های $[0, 1]$ و $[2, 3]$: الف) ظرف؛ ب) تله باشند؟

۲۴.° می‌دانیم که برای دنباله‌ای، هرکدام از فاصله‌های $[0, 1]$ و $[9, 10]$، ظرف است. آیا برای این دنباله

الف) تله‌ای به‌طول ۱ وجود دارد؟

ب) تله‌ای به‌طول ۹ وجود دارد؟

۲۵.° الف) آیا دنباله‌ای وجود دارد که برای‌آن‌هیچ ظرفی وجود نداشته باشد؟

ب) * آیا دنباله‌ای وجود دارد که برای آن، هرفاصله‌ای، ظرف باشد؟

بند۲ . مساله‌های مربوط به‌تعریف حد

عدد a را حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ گویند، وقتی که برای هرعدد مثبت ε، عددی مثل k وجود داشته‌باشد، که به‌ازای

همهٔ جمله‌هایی از دنباله، که در آنها اندیس n از k بزرگتر است، داشته باشیم:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

این حقیقت را، که عدد a ، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ است، به‌این ترتیب می‌نویسند:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

(بخوانید: حد x_n ، وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر است با a)، یا به‌این ترتیب:

$$x_n \to a \text{ وقتی که } n \to \infty$$

(بخوانید: x_n به‌سمت a میل می‌کند، وقتی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند). بعضی نتیجه گیریهای مهمی که از تعریف حد بدست می‌آید، در اینجا می‌آوریم:

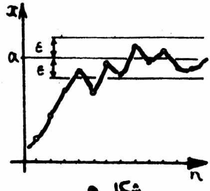
۱) گزارهٔ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، چه مفهوم محسوسی دارد؟

عدد کوچکی مثل ۰/۰۰۱ درنظر می‌گیریم، وفرض می‌کنیم که نتوانیم دوعددی را که اختلافی کمتر از ۰/۰۰۱ دارند، ازهم تمیز بدهیم (می‌توان فرض کرد که جمله‌های دنبالهٔ ما، مقادیری فیزیکی هستند که اندازه‌های آنها را تنها با تقریب ۰/۰۰۱ می‌توانیم اندازه بگیریم). در اینصورت، دنبالهٔ $\{x_n\}$ وقتی به‌سمت a میل می‌کند که در آن از جایی به‌بعد، نتوانیم جمله‌ها را با دنبالهٔ ثابت ... ، a ، a ، a ، تمیز دهیم.

شرط $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، به‌این معناست که برای هرتقریبی در اندازه گیری، دنبالهٔ $\{x_n\}$، از جمله‌ای به‌بعد، برابر مقدار ثابت شود.

به کلمه‌های «برای‌هر» و «از جمله‌ای به‌بعد» دقت کنید. اگر این کلمه‌ها را حذف یا جابجا کنید، این تعریف به کلی مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۲) گاهی راحت‌تر است که دنبالهٔ $\{x_n\}$ را به‌این‌ترتیب، پیش خود مجسم کنیم. روی صفحه، نقطه‌های به‌مختصات $\{x_n ، n\}$ را در نظر می‌گیریم و این نقطه‌ها را به وسیلهٔ خط شکسته‌ای به‌هم وصل می‌کنیم (که‌طبعاً «منحنی نمایش» دنباله نامیده می‌شود) شرط $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ، به‌این معناست که این شکسته، به‌سمت خط

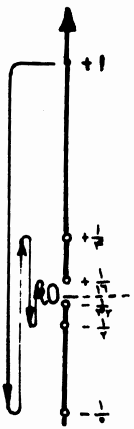


شکل ۵

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$x = a$ نزدیک می‌شود. دقیق‌تر، برای هر $\varepsilon > 0$، خط شکستهٔ ما، ازجایی به‌بعد، به‌طور کامل در داخل نواری به عرض 2ε، که شامل خط $x = a$ است، قرار می‌گیرد (شکل ۵). مثلاً، این طرح هندسی برای حل مساله‌های ۳۱، ۳۵ و ۳۶، سودمند است.

۳) عدد k را، که در تعریف مفهوم حد به‌کار رفته است، معمولاً عددی طبیعی درنظر می‌گیرند. ما چنین شرطی‌را در تعریف حد، وارد نکردیم. برای ما، عدد k می‌تواند هر عدد حقیقی باشد؛ این وضع، برای اثبات وجود حد راحت‌تر است (تبصرهٔ مربوط به حل مسالهٔ ۳۰ را ببینید) و درعین‌حال، مفهوم تعریف را تغییر نمی‌دهد.



شکل ۶

۳۶° این دنباله‌ها داده شده است:

الف) $x_n = \frac{1}{n}$ ؛

ب) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ ؛

ج) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (شکل ۶) ؛

د) $x_n = \log_n 2$.

برای هرکدام از این‌دنباله‌ها، عدد k را طوری پیدا کنید که به‌ازای $n > k$، داشته‌باشیم:

a) $|x_n| < 1$ ؛

b) $|x_n| < 0/001$ ؛

c) $|x_n| < 0/000001$.

۳۷.° الف) ثابت کنید که اگر $x_n \to a$، وقتی که $n \to \infty$؛ دراینصورت هرفاصلهٔ بستهٔ بمرکز نقطهٔ a، تله‌ای برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ است.

ب) آیا عکس این حکم درست‌است؟

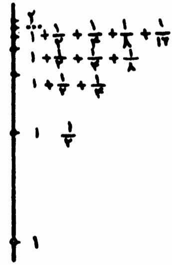
۳۸.° الف) اگر $x_n \to a$، وقتی‌که $n \to \infty$، ثابت کنید که هر فاصلهٔ بسته‌ای به‌مرکز نقطهٔ a، ظرفی برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ است، ولی هیچ فاصلهٔ بسته‌ای که شامل نقطهٔ a نباشد، برای دنبالهٔ $\{x_n\}$، ظرف نیست.

ب) می‌دانیم که برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، هرفاصلهٔ بسته‌ای به‌مرکز نقطهٔ a ، یك‌ظرف است، ولی هیچ فاصلهٔ بسته‌ای که شامل نقطهٔ a نباشد، برای‌این دنباله، ظرف‌نیست. آیا می‌توان حکم کرد که $x_n \to a$ ، وقتی که $n \to \infty$ ؟

۲۹. اگر فاصلهٔ بسته‌ای، برای یك دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، ظرف باشد، ثابت کنید که هیچ عددی واقع در خارج این فاصله وجود ندارد که بتواند حددنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد.

۳۰°. کدامیك از دنباله‌های زیر، دارای حد هستند؟

الف) $۱ ، -\frac{۱}{۲} ، \frac{۱}{۳} ، -\frac{۱}{۴} ، \ldots ، \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} ، \ldots$



شکل ۷

ب) $\frac{۲}{۳} ، \frac{۸}{۹} ، \frac{۲۶}{۲۷} ، \ldots ، \frac{۳^n-۱}{۳^n} ، \ldots$

ج) $۱ ، ۱ + \frac{۱}{۲} ، \ldots ، ۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} ، \ldots$ (شکل ۷).

د) $۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، \ldots$

ه) $۱ ، ۱ ، ۱ ، \ldots ، ۱ ، \ldots$

و) $۰ ، ۱ ، ۰ ، \frac{۱}{۲} ، ۰ ، \frac{۱}{۳} ، \ldots ، ۰ ، \frac{۱}{n} ، \ldots$

ز) $۰/۲ ، ۰/۲۲ ، ۰/۲۲۲ ، \ldots ، ۰/\underbrace{۲۲\ldots۲}_{n \text{ مرتبه}} ، \ldots$

ح) $\sin ۱° ، \sin ۲° ، \sin ۳° ، \ldots ، \sin n° ، \ldots$

ط) $\frac{\cos ۱°}{۱} ، \frac{\cos ۲°}{۲} ، \frac{\cos ۳°}{۳} ، \ldots ، \frac{\cos n°}{n} ، \ldots$

ی) $۰ ، ۱\frac{۱}{۲} ، -\frac{۲}{۳} ، \ldots ، (-۱)^n + \frac{۱}{n} ، \ldots$ (شکل ۸).

۳۱°. آیا ممکن است، دوعدد مختلف، حد یك‌دنباله باشند؟

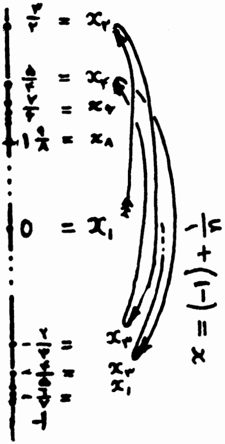
۳۲°. عدد a را، نقطهٔ حدی دنبالهٔ $\{x_n\}$ گویند، وقتی که برای هرعدد مثبت ε و هرعدد k ، اندیس $n > k$ پیدا شود که برای آن داشته‌باشیم:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

الف) ثابت کنید که اگر a ، نقطه حدی دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، هر- فاصلهٔ بستهٔ به‌مرکز نقطهٔ a ، برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، ظرف است.

ب) عکس این قضیه را ثابت کنید.

۳۳.° ثابت کنید که حد دنباله (اگر وجود داشته باشد)، یک‌نقطهٔ حدی است.



شکل ۸

۳۴.° برای هرکدام از دنباله‌های زیر ، همهٔ نقطه‌های حدی را پیدا کنید:

الف) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$;

ب) $x_n = (-1)^n$;

ج) $x_n = \sin n^\circ$

د) $x_n = n^{(-1)^n}$;

ه) $x_n = n$;

و) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$

۳۵°. الف) ثابت کنید که اگر دنباله‌ای دارای حد باشد، کرانه‌دارهم هست. کرانه‌دار بودن یک‌دنباله به‌معنای این است که جملهٔ عمومی آن، از اندیسی به‌بعد، همیشه از عدد ثابتی کوچکتر باشد.

ب) آیا عکس این حکم درست است؟

۳۶°. می‌گویند که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند (این گزاره را به‌این ترتیب می‌نویسند: «$x_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$»)، وقتی که برای هرعدد C ، عددی مثل k پیدا شود، به‌نحوی که برای همهٔ اندیسهای $n > k$ ، این نامساوی برقرار باشد (شکل۹):

$$|x_n| > C$$

توجه کنیم؛ دنباله‌ای که به سمت بی‌نهایت میل کند، به مفهوم تعریفی که در ابتدای این بندآوردیم، دارای حد نیست.

کدامیک از دنباله‌های زیر به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و کدامیک کرانه‌دار نیست:

الف) $x_n = n$;

ب) $x_n = n \cdot (-1)^n$,

ج) $x_n = n^{(-1)^n}$;

د) $x_n = \begin{cases} n & \text{(وقتی که } n \text{ زوج باشد)} , \\ \sqrt{n} & \text{(وقتی که } n \text{ فرد باشد)} , \end{cases}$

ه) $x_n = \dfrac{100n}{100 + n^2}$

۳۷.* شرط زیر را درنظر می‌گیریم (حرف «ه» به‌معنای «برای‌هر»، و حرف «پ» به‌معنای «پیدا می‌شود. . . به‌نحوی که»، می‌باشد):

۱) پ $\varepsilon>0$ پ k پ $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۲) پ $\varepsilon>0$ پ k پ $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۳) پ $\varepsilon>0$ پ k ه $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۴) پ $\varepsilon>0$ پ k ه $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۵) پ $\varepsilon>0$ ه k پ $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۶) پ $\varepsilon>0$ ه k پ $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۷) پ $\varepsilon>0$ ه k ه $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۸) پ $\varepsilon>0$ ه k ه $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۹) ه $\varepsilon>0$ پ k پ $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۱۰) ه $\varepsilon>0$ پ k پ $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۱۱) ه $\varepsilon>0$ پ k ه $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۱۲) ه $\varepsilon>0$ پ k ه $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۱۳) ه $\varepsilon<0$ ه k پ $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۱۴) ه $\varepsilon>0$ ه k پ $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

۱۵) ه $\varepsilon>0$ ه k ه $n>k$ $|x_n-a|<\varepsilon$

۱۶) ه $\varepsilon>0$ ه k ه $n>k$ $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$

شکل ۹

کدامیک از این شرطها، خاصیتی از دنباله را بیان می‌کند (کرانه‌دار است، **عدد** a حد آنست، دارای عدد a به‌عنوان نقطهٔ حدی است، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند) و یا این خاصیتها را نفی می‌کند؟

۳۸.* پنج ویژگی دنباله‌را درنظر می گیریم: ۱) به‌طور اتحادی با a برابر است، ۲) عدد a حد آنست ۳) عدد a به‌عنوان نقطهٔ حدی آنست، ۴) کرانه‌دار است، ۵) به‌سمت بی‌نهایت میل می کند.

هردنباله را می‌توان باانتخاب پنج علامت مثبت و منفی، مشخص کرد. مثلا «$-+++-$» (علامتها را ازچپ به‌راست بخوانید)، به‌معنای آنست که دنباله دارای ویژگی‌های ۲ ، ۳ و ۴ است و ویژگی‌های ۱ و ۵ را ندارد. بعضی از ترکیب‌های علامتها، بی‌معنی است (مثل ترکیب «$+++++$»: اگردنباله‌ای ویژگی ۱ را داشته باشد، نمی‌تواند ویژگی ۵ راهم داشته‌باشد).

الف) همهٔ ترکیب علامت‌ها را که دارای معنی هستند، ذکر کنید و برای هرکدام ازآنها، دنباله‌ای بسازید.

ب) ثابت کنید که بقیهٔ ترکیب علامتها، بدون معنی‌اند.

۳۹. ثابت کنید که اگر دنباله‌ای دارای‌حد باشد، درآن یا بزرگترین جمله، یا کوچکترین جمله، ویا هردوی‌آنها وجود دارد. برای هریك از این سه‌حالت، نمونه‌ای بیاورید.

۴۰. ثابت کنید که از هردنبالهٔ نامتناهی، می‌توان یك دنبالهٔ نامتناهی یکنوا، بیرون آورد (دنبالهٔ $\{x_n\}$ را یکنوا گویند، وقتی که یکی از دوشرط زیر، درمورد آن صدق کند:

$$1)\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$$

$$2)\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$$

درحالت اول، دنباله را غیرنزولی ودرحالت دوم غیرصعودی گویند).

در نظریه حد، یکی ازخاصیتهای عددهای حقیقی، که معمولا به صورت یك اصل بیان می‌شود، بسیار مهم است.

اصل بولتسانو–وایرشتراس. هردنبالهٔ نامتناهی یکنوا و کرانه‌دار، دارای حد است.

(ذکر کلمهٔ «نامتناهی» برای دنباله، به‌خاطر تاکید است، و الا هر دنباله‌ای، نامتناهی است).

این اصل، خاصیت تمامیت مجموعهٔ عددهای حقیقی‌را منعکس می کند.

به‌زبان ریاضی می‌توان گفت که این اصل نشان می‌دهد که روی محور عددها «رخنه» و «شکافی» وجود ندارد.

در آنالیز ریاضی ثابت می کنند که اصل بولتسانو- وایرشتراس باهر کدام از دوحکم زیرهم‌ارز است:

۱. اگر روی محور عددها دنبالهٔ نامتناهی از پاره خطهایی را به‌وجود آوریم، به‌نحوی که هر پاره‌خط داخل پاره‌خط قبلی قرار گرفته باشد، درآنصورت، همهٔ این پاره‌خطها دست‌کم یك‌نقطه مشترك دارند.

۲. هرعدد حقیقی را می‌توان به‌صورت یك کسر اعشاری نامتناهی (متناوب یا نامتناوب) نوشت؛ و برعکس هر کسری ازاین‌نوع، متناظر بایك‌عدد حقیقی است.

اگر یکی ازاین دوحکم را، به‌عنوان یك‌اصل بپذیریم، آنوقت هم حکم دوم و هم اصل بولتسانو- وایرشتراس را می‌توان به‌صورت قضیه ثابت کرد.

۴۱.° ثابت کنید که اصل بولتسانو-وایرشتراس، برای عددهای گویا، قابل‌اجرا نیست، یعنی دنباله‌های نامتناهی کرانه‌دار و یکنوا از عددهای گویا وجود دارد، که دارای حد گویا نیستند.

۴۲. ثابت کنید که‌هردنبالهٔ کرانه‌دار، دست‌کم یك‌نقطهٔ حدی دارد.

۴۳. می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد a ، و دنبالهٔ $\{y_n\}$ دارای حد b می‌باشد. آیا درست است که بگوئیم، دنباله‌های زیر دارای حدند:

a) $\{x_n+y_n\}$; b) $\{x_n-y_n\}$;

c) $\{x_n \cdot y_n\}$; d) $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$?

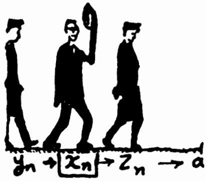
۴۴.° می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد است، ولی دنبالهٔ $\{y_n\}$ ، حدی ندارد. آیا دنباله‌های زیر، حد دارند:

a) $\{x_n+y_n\}$; b) $\{x_n \cdot y_n\}$?

۴۵.° می‌دانیم که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ ، دارای حدنیستند. آیا ممکن است دنباله‌های زیر، دارای حدباشند:

e) $\{x_n+y_n\}$, b) $\{x_n \cdot y_n\}$?

۴۶.° (قضیهٔ دو نگهبان). می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ بین دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{z\}$ قرار گرفته است، یعنی به‌ازای همهٔ مقادیر n، نامساوی $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ برقرار است (شکل ۱۰). ثابت کنید که اگر دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ دارای یک‌حد مساوی a باشند، دنبالهٔ $\{x_n\}$ هم به‌سمت a میل می کند.

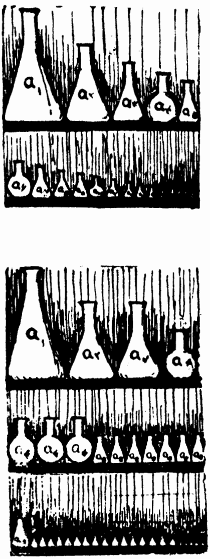


شکل ۱۰

مجموع یک‌رشتهٔ نامتناهی از عددها، به‌این ترتیب تعریف می‌شود. فرض کنید، رشتهٔ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

داده شده باشد. S_n رامجموع n جملهٔ اول این‌رشته می‌نامیم (که آنرا n امین مجموع جزئی رشته گویند). اگر دنبالهٔ $\{S_n\}$ دارای حد s باشد، عدد S را مجموع رشتهٔ مفروض گویند. خود رشته، دراین حالت، متقارب گفته می‌شود. اگر دنبالهٔ $\{S_n\}$ حدی نداشته باشد، آنرا رشتهٔ متباعد گویند، در این‌حالت، رشته‌دارای مجموعی نیست.


شکل ۱۱

۴۷. ثابت‌کنید که رشته‌های زیر متقارب‌اند:

الف) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots;$

ب) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots;$

ج) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots;$

۴۸. ثابت‌کنید که اگر رشتهٔ

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

متقارب باشد، داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

۴۹.* فرض‌کنید $\{a_n\}$، یک دنبالهٔ نزولی‌از عددهای مثبت باشد، ثابت‌کنید که رشتهٔ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

وقتی، وتنها وقتی، متقارب است که رشتهٔ زیر متقارب باشد. (شکل ۱۱):

$$a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots+2^n a_{2^n}+\cdots$$

۵۰.° به‌ازای کدام مقادیر حقیقی p رشتهٔ زیر متقارب است:

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots?$$

بند۳. مساله‌هایی برای محاسبه حد

برای محاسبهٔ حد دنباله. اغلب از دستورهای زیر استفاده می‌کنند(برای اثبات آنها، حل مسالهٔ ۴۳ را ببینید):

اگر داشته باشیم: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n=a$ و $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, y_n=b$ ، داریم:

$$1)\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n+y_n)=a+b\,;$$

$$2)\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n-y_n)=a-b\,;$$

$$3)\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b\,\cdot$$

$$4)\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$$

متوجه‌باشید که این دستورها را تنها وقتی می‌توان قبول‌کرد که برای دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ ، حدی وجود داشته باشد.

۵۱.° اشتباه را در استدلالهای زیر پیدا کنید:

الف) دنبالهٔ $x_n=\dfrac{2n-1}{n}$ را درنظر می‌گیریم، از یکطرف

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,x_n=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$$

و ازطرف دیگر

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,x_n=\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(2n-1)}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(n)}=\frac{\infty}{\infty}=1$$

از آنجا $1=2$؟!

ب) دنبالهٔ $x_n=1$ را درنظر می‌گیریم. از یك طرف روشن است

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ۱$$

ازطرف دیگر می‌توان نوشت: $n-(n+۱)=۱$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(n+۱) - \lim_{n\to\infty} n = \infty - \infty = ۰$$

و برای ما بدست می‌آید $۱ = ۰$ ؟!

ج) دنبالهٔ $x_n = \frac{n-۱}{n}$ را درنظر می‌گیریم. از یک‌طرف

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = ۱$$

از طرف دیگر

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(n-۱)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n}\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}(n-۱)\times ۰ = ۰$$

و ازآنجا $۱ = ۰$ ؟!

۵۲. می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند و دنبالهٔ $\{y_n\}$ دارای حدی مساوی a است، ثابت کنید:

الف) دنبالهٔ $\{x_n + y_n\}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛

ب) دنبالهٔ $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ به‌سمت صفر میل می‌کند،

ج) دربارهٔ دنبالهٔ $\{x_n \cdot y_n\}$ چه‌می‌توان گفت؟

۵۳.° دودنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ پیدا کنید، که برای آنها

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ۰ \text{ ، } \lim_{n\to\infty} x_n = ۰$$

و ضمنا داشته‌باشیم:

الف) $\frac{x_n}{y_n} \to ۰$ ، وقتی $n \to \infty$ ؛

ب) $\frac{x_n}{y_n} \to ۱$ ، وقتی $n \to \infty$ ؛

ج) $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$ ، وقتی $n \to \infty$ ؛

د) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ وجود نداشته‌باشد.

۵۴.° حد این دنباله‌ها را پیدا کنید:

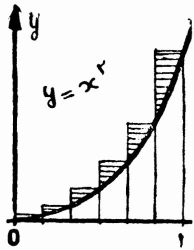
الف) $x_n=\dfrac{2n+1}{3n-5}$؛ ب) $x_n=\dfrac{10n}{n^2+1}$،

ج) $x_n=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$؛ د) $x_n=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

۵۵. حد این دنباله را پیدا کنید:

$$x_n=\frac{1}{n^{k+1}}(1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k)$$

(k، عدد ثابت طبیعی است).



شکل ۱۲

این دنباله، تعبیر هندسی جالبی دارد، قسمتی از صفحه را، که محدود به نمایش تابع $y=x^k$، محور ox و خط راست $x=1$ است، درنظر می‌گیریم. فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$ را روی محور ox به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم وروی هریك ازاین قسمتها، مستطیلی می‌سازیم که راس بالا وسمت راست‌آن، برمنحنی نمایش‌ما، قرارگرفته باشد (شکل ۱۲). مجموع مساحتهای همهٔ مستطیلهایی را که ساخته‌ایم، برابر می‌شود با

$$x_n=\frac{1}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\cdots+n^k)$$

بنابرتعریف، حد این مقدار را، وقتی که $n\to\infty$، مساحت شکل منحنی‌الخط مفروض‌می‌گویند.

۵۶.° ثابت کنید $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

۵۷. ثابت کنید: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{n}{2^n}=0$.

۵۸. ثابت کنید: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{n}{a^n}=0$ (به‌ازای $a>1$).

۵۹.* ثابت کنید: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\dfrac{\log_2 n}{n}=0$.

۶۰.* $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sqrt[n]{n}$ را پیدا کنید.

۶۱.* الف) ثابت کنید که برای هرمقدار مثبت و حقیقی a ، دنبالهٔ $x_n = n\left(\sqrt[n]{a} - ۱\right)$ ، دارای حد است.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - ۱\right)$ را به $l(a)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که

$$l(ab) = l(a) + l(b)\ ;\ l(a^P) = P \cdot l(a)$$

برای هر a و l مثبت وهر P حقیقی.

مسالهٔ «۶۱ — ب» نشان می‌دهد که بیان $l(a)$، ویژگیهایی شبیه لگاریتم عدد a دارد. درواقع، برای هرمبنای c ، این اتحادها درست است:

$$\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b)\ ,\ \log_c(a^P) = P\log_c(a)$$

روشن شده است که این شباهت، اتفاقی نیست.

۶۲. الف) ثابت کنید که نسبت $\dfrac{l(a)}{\log a}$، به a بستگی ندارد و برابر بامقدار ثابتی مثل M است.

ب) ثابت کنید که مقدار ثابت M ، غیراز صفر است.

ج) ثابت کنید که عددمثبت e وجود دارد، بنحوی که $l(a) = \log_e(a)$. به‌عددe ، که درمسالهٔ ۶۲ از آن صحبت کردیم، تقریباً درهمهٔ رشته‌های ریاضیات، برخورد می کنیم. دربارهٔ این عدد، می‌توان یك کتاب کامل نوشت (وچنین کتابهایی نوشته شده است). در اینجا، ما به‌بحث تفصیلی آن نمی‌پردازیم. تنها متذکر می‌شویم که برای نخستین‌بار در تاریخ ریاضیات، به‌عنوان مبنای لگاریتم— که به‌وسیلهٔ نپر و جدا از او بورگی کشف شد—همین عدد e را انتخاب کردند. این لگاریتم را لگاریتم طبیعی عدد a گویند و به صورت $\ln a$ نشان می‌دهند. عدد ثابت M، که دربالا ازآن صحبت کردیم، برابر است با

$$\ln ۱۰ = ۲/۳۰۲۵۸۵\ldots$$

و خود عدد e برابر است با

$e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸ \ldots$

در اینجا، دو بیان دیگر از عدد e را می‌آوریم، که به‌کمک آنها می‌توان مقدار e را با هر تقریب دلخواه پیدا کرد:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n,$$

$$e = ۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots+\frac{۱}{n!}+\cdots$$

۶۳. p را عدد حقیقی دلخواهی، غیر از صفر، فرض کنید. واسطهٔ مرتبهٔ p ام دو عدد مثبت a و b را به‌عبارت $\sqrt[p]{\frac{a^p+b^p}{۲}}$ گویند. ما این واسطه را به $S_p(a , b)$ نشان می‌دهیم.

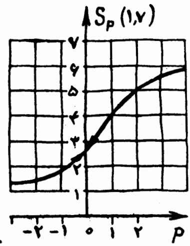
در حالتهای خاص، بدست می‌آید:

$$S_۱(a , b) = \frac{a+b}{۲}$$ (واسطهٔ عددی)

$$S_۲(a , b) = \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$$ (واسطهٔ مربعی)

$$S_{-۱}(a , b) = \left(\frac{a^{-۱}+b^{-۱}}{۲}\right)^{-۱} = \frac{۲ab}{a+b}$$ (واسطهٔ توافقی)

در شکل ۱۳، منحنی نمایش $S_p(a , b)$ را به ازای $a=۱$ و $b=۷$ نشان داده‌ایم.



شکل ۱۳

الف) ثابت کنید که مقدار واسطهٔ $S_p(a , b)$ ، از هر مرتبه‌ای که باشد بین دو عدد a و b قرار دارد؛

ب) این نامساویها را ثابت کنید.

$$S_۲(a , b) \geqslant S_۱(a , b) \geqslant S_{-۱}(a , b) \geqslant S_{-۲}(a , b)$$

۶۴. حد این دنباله‌ها را پیدا کنید:

الف) $x_n = S_n(a , b)$ ،

ب) $x_n = S_{-n}(a , b)$ ،

ج)* $x_n = S_{\frac{۱}{n}}(a , b)$

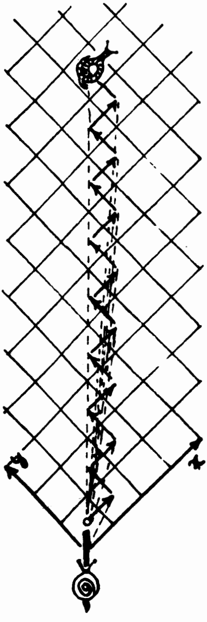
(عددهای a ، b ، مقادیری ثابت هستند).

۶۵*. در n پاکت، باآدرسهایی که دارند، n نامه را شانسی گذاشته‌ایم:

الف) احتمال اینکه حتی یکی از نامه‌ها، باآدرس پاکت تطبیق نکند، چقدر است؟

ب) ثابت کنید که وقتی $n \to \infty$ ، این احتمال دارای حدی‌است.

(احتمال یك‌حادثه عبارتست ازنسبت تعداد حالتهای مساعد (یعنی‌تعداد حالتهایی که برای حادثه پیش می‌آید) به‌تعداد همهٔ حالتهای ممکن. درمسالهٔ ما، تعداد همهٔ حالتهای ممکن برابر است باتعداد همهٔ روشهای ممکن جابه‌جا کردن نامه‌ها در پاکتها که برابر است با $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$. تعداد همهٔ حالتهایی را ، که بنابرآن حتی یکی ازنامه‌هاهم در پاکت خودش قرار نگرفته باشد، به a_n نشان می‌دهیم. دراینصورت، احتمال موردنظر را می‌توان به‌صورت $\frac{a_n}{n!}$ نوشت.)



شکل ۱۴

تااینجا، دربارهٔ حد دنباله‌های عددی، صحبت کردیم. ولی، به‌یاری‌عددها می‌توان به‌موضوع‌های گوناگون‌هندسی رسید.مثلا، جهت خط‌راست را روی‌صفحه، می‌توان‌باضریب زاویهٔ‌آن نشان داد؛ نقطه‌ای‌را که بریك خط‌راست و یا دریك صفحه واقع باشد، می‌توان بامختصات آن مشخص کرد و غیره. بنابراین ، در همهٔ حالتهایی که برای دنباله‌ای از موضوعهای هندسی، از اصطلاح‌های «حد» یا «میل می‌کند» استفاده می‌کنیم، درواقع، بایك‌دنبالهٔ عددی (که معرف‌این موضوعهای هندسی است)سروکار داریم. مثلا عبارت«دنبالهٔ نقطه‌های M_n روی صفحه، به سمت نقطهٔ M میل می‌کند» را باید به‌این مفهوم گرفت که مختصات نقطهٔ M_n به‌سمت مختصات نقطهٔ M میل می‌کند.

۶۶°. حلزونی روی خطهای‌یك‌کاغذ شطرنجی، به‌این‌ترتیب حرکت‌می‌کند: درگام‌نخست، یك‌خانه‌به‌سمت‌راست می‌رود درگام‌دوم،یك‌خانه به‌طرف بالا؛ درگام‌سوم،یك‌خانه به‌سمت راست‌ودرگام چهارم،یك‌خانه به‌طرف‌بالا وغیره(شکل۱۴).

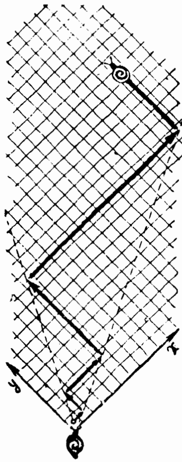
حلزون‌دوم، درجای‌خود نشسته است و اولی را با دوربین‌نگاه می‌کند. اگرحلزون‌نخست، به‌ترتیبی که گفتیم به حرکت خود ادامه دهد،آیا لولهٔ دوربین، به‌سمت حدی میل می‌کند؟

۶۷. اگر، حلزون مسالهٔ‌قبل به‌ترتیب‌زیرحرکت کند، در پاسخ آن‌چه تغییری حاصل می‌شود:

a) یك خانه به‌طرف راست و دوخانه به‌طرف‌بالا، یك خانه به‌طرف راست و دوخانه به‌طرف بالا و غیره.

b) ۱ خانه به‌طرف‌راست‌و ۲ خانه به‌طرف‌بالا، ۳ خانه به طرف راست و چهارخانه به طرف بالا، ۵ خانه به‌طرف راست و ۶ خانه به‌طرف بالا وغیره.

c) ۱ خانه به‌طرف راست و ۲ خانه به‌طرف بالا، ۴ خانه به طرف راست و ۸ خانه به طرف بالا، ۱۶ خانه‌به‌طرف راست و ۳۲ خانه‌به‌طرف‌بالا وغیره(شکل ۱۵).

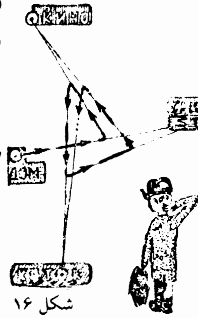


شکل ۱۵

۶۸°. روی سهمی‌نمایش تغییرات تابع $y=x^2$ ، نقطهٔ A_0 را به‌طول a ، و دنبالهٔ نقطه‌های A_n را باطولهای $a+\frac{1}{n}$ انتخاب می‌کنیم. M_n رانقطهٔ برخورد محور ox باامتداد خط A_0A_n می‌گیریم. ثابت کنید، وقتی که $n \to \infty$ ، دنبالهٔ نقطه‌های M_n دارای حدی است و این حد را پیدا کنید.

اگر M_0 ، حد دنبالهٔ نقطه‌های M_n باشد، خط راست A_0M_0 را مماس برسهمی درنقطهٔ A_0 گویند.

۶۹. توکا ازمنزل بیرون آمد و به‌طرف مدرسه رفت. وقتی که نصف راه را رفت، تصمیم گرفت‌فیلم تماشا کند و به طرف سینما رفت. وقتی که‌نیمی از راه‌سینماراطی کرد، فکرکرد که اگر یخ‌بازی‌کند بهتراست و به‌طرف قصریخ حرکت کرد. ولی، بعداز آنکه به‌نیمهٔ راه رسید تصمیم خودرا عوض کرد و به طرف مدرسه رفت. درنیمهٔ‌راه مدرسه، دوباره به‌طرف سینما برگشت (شکل ۱۶). اگرتوکا، به‌همین‌ترتیب، تصمیم خود را عوض کند، بالاخره به‌کجا خواهد رسید؟



شکل ۱۶

۷۰ دنبالهٔ نقطه‌های M_n را روی یک‌خط راست، به‌این ترتیب درست کرده‌ایم. دونقطهٔ اول M_1 و M_2 را به‌دلخواه وسپس هرنقطهٔ بعدی‌را، وسط دونقطهٔ قبل ازآن گرفته‌ایم. ثابت کنیدکه دنبالهٔ M_n حدی دارد واین حدرا پیدا کنید.

۷۱. این مجموعه‌ها را پیدا کنید:

الف) $1+a+a^2+\cdots+a^n+\cdots$

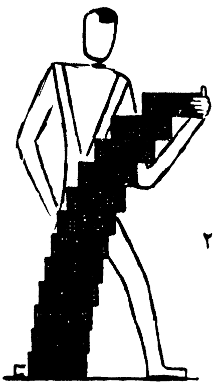
ب) $a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n+\cdots$

ج) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

د) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$

ه)* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

۷۲.* بینهایت آجر یکجور، به‌شکل مکعب‌مستطیل دراختیار داریم. آجرها را یکی‌پس‌ازدیگری با کمی انحراف رویهم می‌گذاریم، به‌نحوی‌که هیچکدام از آنها سقوط نکنند (شکل ۱۷). به این ترتیب، تاچه طولی می‌توان آجرهارا رویهم گذاشت؟



شکل ۱۷

۷۳. ثابت کنیدکه دنبالهٔ

$$2\ ;\ 2+\frac{1}{2}\ ;\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}\ ;\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}\ ;\ \cdots$$

دارای حدی است. این حدرا پیدا کنید.

۷۴. برای محاسبهٔ ریشهٔ دوم عدد مثبت a، می‌توان از روش تقریبهای متوالی زیراستفاده کرد: عدد دلخواه x_0 را انتخاب کنید و دنباله را بااین قانون بسازید:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

الف) ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \sqrt{a} & (x_0 > 0) \\ -\sqrt{a} & (x_0 < 0) \end{cases}$$

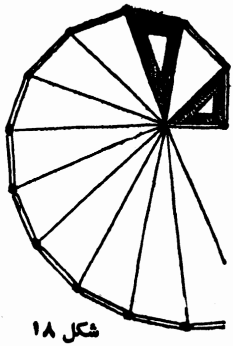
(منظور ما از $\sqrt{a}$ ، مقدار حسابی جذر a است).

ب) اگر مقدار اولیه $\sqrt{10}$ را $x_0 = 3$ بگیریم، چند تقریب متوالی لازم است (یعنی چند جملهٔ متوالی از دنبالهٔ $\{x_n\}$ را باید حساب کرد) تامقدار $\sqrt{10}$ تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب به‌دست آید؟

۷۵. روی میزی چوب کبریتها را به این نحو به‌دنبال‌هم می‌چینیم: چوب کبریت دوم برچوب کبریت اول عمود است، از آن به‌بعد، هرچوب کبریت برخطی عمود است که ابتدای این چوب کبریت را به ابتدای چوب کبریت اول وصل می کند (شکل ۱۸). یك مارپیچ بدست می آید.

الف) این پیچ چندمرتبه، دور نقطهٔ مبدأ می‌چرخد؟

ب) فاصلهٔ بین‌دوحلقهٔ متوالی پیچ چقدر است؟



شکل ۱۸

ooo

مسأله‌هایی برای آزمایش خودتان

۱. اگر زمین را، یك کرهٔ کامل به حساب آوریم طول استوا را باچه دقتی باید اندازه گرفت، تا حجم زمین با دقت تا ۱ کیلومتر مکعب محاسبه شود؟

۲. می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به سمت صفر میل می‌کند.

الف) آیا ممکن است در این دنباله، جمله‌ای بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ وجود داشته باشد؟

ب) آیا ممکن است همهٔ جمله‌های دنباله، منفی باشند؟

ج) آیا ممکن است همهٔ جمله‌های دنباله، از ۰/۰۰۰۰۰۱ بزرگتر باشند؟

۳. ثابت کنید که عدد ۱، حد دنبالهٔ $x_n=(-1)^n+n^{-1}$ نیست.

۴. می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. مطلوبست حد هر کدام از دنباله‌های زیر.

الف) $y_n=\dfrac{2x_n-1}{x_n+1}$؛ ب) $y_n=\dfrac{x_n^2+x_n-2}{x_n-1}$؛

ج) $y_n=\dfrac{x_n^m-1}{x_n-1}$؛ د) $y_n=\sqrt{x_n}$؛

۵. مطلوبست محاسبهٔ هر کدام از حدهای زیر:

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-2}{1+2+3+\dots+n}$؛

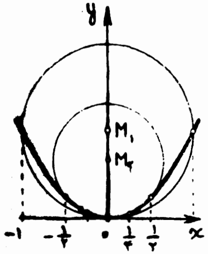
ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$؛

ج) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{4^n}$؛ د) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n}$

۶. دنبالهٔ $\{x_n\}$ به این ترتیب، ساخته شده است: جملهٔ نخست، به

دلخواه اختیار شده است و از جملهٔ دوم به بعد، با رابطهٔ $x_{n+۱} = ax_n + ۱$ به دست آمده است. به ازای چه‌مقادیر حقیقی a ، دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حداست.

۰۷ روی منحنی تابع $y = x^۲$، نقطه‌های A_n و B_n را به‌ترتیب به‌طولهای $\frac{۱}{n}$ و $-\frac{۱}{n}$ در نظر می گیریم. فرض کنید M_n مرکز دایره‌ای باشد که از نقطه‌های A_n و B_n و مبداء مختصات گذشته است (شکل ۱۹). ثابت کنید که دنبالهٔ نقطه های $\{M_n\}$ دارای حدی است. این حد را پیدا کنید.



شکل ۱۹

۰۸ می‌دانیم که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دارای حد هستند. دنبالهٔ تازه‌ای به این ترتیب تشکیل می‌دهیم:

$$x_۱ ، y_۱ ، x_۲ ، y_۲ ، \dots ، x_n ، y_n ، \dots$$

آیا این دنباله دارای حد است؟

۰۹ الف) می‌دانیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد است. ثابت کنید که دنبالهٔ $y_n = x_{n+۱} - x_n$ به سمت صفر میل می کند.

ب) آیا عکس حکم الف) درست است؟

۰۱۰ این مجموعها را محاسبه کنید:

الف) $\frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \frac{۳}{۴!} + \dots + \frac{n}{(n+۱)!} + \dots$

ب) $\frac{۱}{۶} + \frac{۵}{۳۶} + \frac{۱۹}{۲۱۶} + \dots + \frac{۳^n - ۲^n}{۶^n} + \dots$

○ ○ ○

۱. اگر در تمام شبانه روز باران نبارد، هردو دانش‌آموز، نشانهٔ + را می‌گذارند. در حالتی هم که مرتباً باران بیاید، هر دو، نشانهٔ — را می‌گذارند. اگر صبح باران بیاید و ظهر وعصر هوا خشک باشد، دانش‌آموز اول نشانهٔ — و دانش‌آموز دوم نشانه + را می‌گذارد.

نشانهٔ «— +» پیش نمی‌آید، زیرا دانش‌آموز اول، نشانهٔ + راتنها در حالتی می‌گذارد که اصلا باران نبارد. ولی، در اینصورت دانش‌آموز دوم هم، نشانهٔ + را خواهد گذاشت.

۲. روش اول. وقتی که دانش‌آموز اول، نشانهٔ + را می‌گذارد، به این معناست که اصلا باران نمی‌آید. درچنین صورتی، دو دانش‌آموز دیگرهم همان نشانهٔ + را می‌گذارند و نشانه‌گذاری به صورت «+++» درمی‌آید. اگر دانش‌آموز اول، نشانهٔ — و دانش‌آموز سوم نشانهٔ + بگذارد، به این معناست که تنها در یکی از سه نوبت، باران می‌بارد؛ و بنابراین، در چنین حالتی دانش آموز دوم باید نشانهٔ + را بگذارد و نشانه گذاری به صورت «++—» درمی‌آید. درحالتی که دو دانش‌آموز اول وسوم، نشانهٔ — بگذارند، به معنای آنست که باران در دو نوبت از روز و یا هرسه نوبت می‌بارد. در حالت اول دانش‌آموز دوم نشانهٔ + و در حالت دوم، نشانهٔ — رامی‌گذارد؛ ونشانه‌گذاری به‌یکی ازدو صورت «—+—» یا «———» درمی‌آید. از آنجا که همه حالتهای ممکن را به حساب آورده‌ایم، حالتهای دیگر نشانه‌گذاری هرگز پیش نمی‌آید.

روش دوم. باران‌ممکن‌است در ۰، ۱، ۲، یا ۳ نوبت ببارد. پاسخ مسأله، از این جدول به دست می‌آید:

در چند نوبت باران آمده است؟ / نشانه‌گذاری	۰	۱	۲	۳
دانش اموز اول	+	−	−	−
دانش اموز دوم	+	+	+	−
دانش اموز سوم	+	+	−	−

۴. الف) A را کوتاهترین مرد از بین بلند قدها و B را بلندترین مرد از بین کوتاه قدها می گیریم. C را مردی می گیریم که درصف A و درردیف B قرارگرفته است . A و B را با C مقایسه می کنیم . A بلندترین مرد در صف خود است، بنابراین از C بلندتر است ؛ B کوتاهترین مرد در ردیف خود است، بنابراین از C کوتاهتر است، در نتیجه، A از B بلندتر است.

ب) دو وضع را در نظرمی‌گیریم (شکل ۲۰).

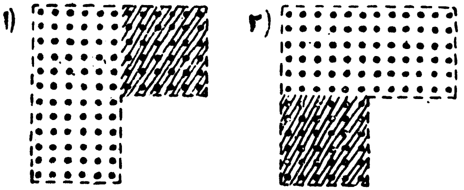
اگر در قسمت هاشور خورده ، بلندترین مردها ، نسبت به بقیه ایستاده باشند، در اینصورت، کوتاهترین مرد از بین بلند قدها، در حالت اول بلندتر ازبلند قدترین مرد از بین کوتاه قدها است و درحالت دوم کوتاهتر ازاوست (امتحان کنیدا).

فکر کنید که چرا در حالت اول از این دو حالت ، نمی‌توان از همان استدلالی که در قسمت الف) به‌کار بردیم، استفاده کرد.

۵. فرض کنیم که هردانش‌آموز تنها یک‌مسأله را حل کرده‌باشد، منتهی هرمسأله به وسیلهٔ کسی حل‌شده باشد (یعنی حتی یک‌مسأله را دونفر حل‌نکرده باشند). در این حالت ، بازرسی تکلیفها به مفهوم الف) دشوار، و به مفهوم ب) آسان می‌شود.

۷. مثالهای ۷ = ۴ + ۳ و ۹ = ۷ + ۲ ، نشان می‌دهند که قضیه‌های ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ نادرست‌اند. قضیهٔ ۱ روشن‌است وقضیهٔ ۶ به سادگی به‌طریق برهان خلف ثابت می‌شود.

۸. الف زاویهٔ روبه‌روی به ضلع ۱۳ را در نظرمی گیریم . اگر این



شکل ۲۰

زاویه حاده باشد، بنا به قضیهٔ مربوط به ضلع روبه‌روی زاویهٔ حاده بایدداشته باشیم:

$$۱۳^۲ < ۱۲^۲ + ۵^۲$$

اگر این زاویه منفرجه باشد، بنا بر قضیهٔ مربوط به‌ضلع روبه‌روی زاویهٔ منفرجه باید داشته باشیم:

$$۱۳^۲ > ۱۲^۲ + ۵^۲$$

ولی، هردوی این نامساوی‌ها نادرستند، زیرا

$$۱۳^۲ = ۱۶۹ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۲^۲ + ۵^۲$$

بنابراین، زاویهٔ روبه‌روی ضلع ۱۳ ، نه حاده است و نه منفرجه. یعنی قائمه است.

ب) قضیهٔ فیثاغورث مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، ولی ما از قائم‌الزاویه بودن مثلث اطلاعی نداریم، بنابراین، نمی‌توان ازقضیهٔ فیثاغورث استفاده کرد.

بعضی از دانش‌آموزان اینطوراستدلال می‌کنند: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر مثلث ما قائم الزاویه نباشد، دراینصورت بایدحکم قضیهٔ فیثاغورث سازگار نباشد و باید رابطهٔ $۱۳^۲ \neq ۱۲^۲ + ۵^۲$ برقرار باشد. ولی این رابطه درست نیست و بنابراین، مثلث قائم‌الزاویه است.

ولی، در واقع، استدلالی که به وسیله «حروف‌خوابیده» بیان‌شده است، ناشی ازقضیهٔ فیثاغورث نیست، زیرا قضیهٔ فیثاغورث‌مربوط به‌مثلث‌قائم‌الزاویه است و هیچ حکمی دربارهٔ مثلثهای دیگرنمی کند. به این ترتیب، این‌استدلال از قضیهٔ فیثاغورث استفاده نمی‌کند، بلکه مربوط به قضیه‌های دیگری است که دربارهٔ مثلثهای غیر قائم‌الزاویه وجود دارد.

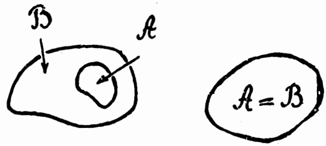
۹. قضیهٔ ۸ به سادگی، و از طریق برهان خلف، ثابت می‌شود (البته، باشرط درستی قضیهٔ ۱). در واقع، اگرقضیهٔ ۸ نادرست باشد، به‌معنای‌آنست که از $\overline{B}$ ، نمی‌توان A را نتیجه گرفت؛ بنابراین، باید حالتی وجود داشته باشد که در آن B درست و A نادرست باشد. ولی، این به‌معنای آنست که A درست و B نادرست است، که بنابرقضیهٔ ۱ ، ممکن نیست.

برای قضیه‌های ۴ و ۵ ، می‌توان مثالهایی برای A و B انتخاب کرد که در مورد آنها این دوقضیه درست باشند، و هم می‌توان مثالهایی پیدا کرد که برای آنها این دو قضیه نادرست باشند، ساده‌ترین مثالها را می‌توان این طور ساخت. $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را، دو مجموعهٔ نقطه‌ها در صفحه فرض کنید. گزارهٔA را اینطور انتخاب می‌کنیم: «نقطهٔ M متعلق است به مجموعهٔ $\mathcal{A}$» و گزارهٔ B

را به این ترتیب: نقطهٔ M متعلق است به مجموعهٔ $\mathcal{B}$». دراینصورت، قضیهٔ ۱ به این معناست که مجموعهٔ $\mathcal{A}$ به طور کامل در داخل مجموعهٔ $\mathcal{B}$ است. قضیهٔ۲ یعنی که مجموعهٔ $\mathcal{B}$ عبارتست از متمم* مجموعهٔ $\mathcal{A}$ ؛ قضیهٔ ۳ یعنی که مجموعهٔ $\mathcal{A}$ عبارتست از متمم مجموعهٔ $\mathcal{B}$ و غیره.

خودتان بقیهٔ قضیه‌ها را تنظیم کنید و نمونه‌هایی برای مجموعه های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رسم کنید که برای آنها این قضیه‌ها درست باشد و نمونه‌هایی که برای آنها این قضیه‌ها نادرست باشد.

مثالهای زیر را، با توجه به شکل ۲۱ به دست آورده‌ایم. خودتان به آن رسیدگی کنید و نتیجه بگیرید که قضیه‌های ۴ و ۵ ، ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد.



شکل ۲۱

روشن است که می‌توان مثالهای دیگری هم پیدا کرد (مثلا ، قضیه‌های ۱ و ۶ ازمسألهٔ ۷ ، و یا قضیه‌های درست دیگری که از هندسه وجبرمی‌دانیم).

حالا نادرستی قضیه‌های ۲ ، ۳ ، ۶ و ۷ را ثابت می کنیم.

اگر قضیهٔ ۲ درست باشد، طرح زیر را داریم:

$$\text{A} \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۱}} \text{B} \xleftarrow{\text{قضیه ۲}} \text{A}$$

(بنابر قضیهٔ ۱ : اگر A درست باشد، آنگاه B درست است و بنابر قضیهٔ ۲: اگر A نادرست‌باشد، آنگاه B درست است). بنابراین، حکمB باید همیشه درست باشد، در حالیکه چنین گزاره‌هایی مورد نظر ما نیست.

اگرقضیهٔ ۳ درست باشد داریم:

$$\text{B} \xleftarrow{\text{قضیهٔ ۱}} \text{A} \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۳}} \text{B}$$

یعنی، اگر در حالتی، حکم A درست باشد، درآنصورت دوگزارهٔ B و B ، که متناقض یکدیگرند، درست‌است‌واین‌ممکن‌نیست.بنابراین، A باید همیشه نادرست باشد، گزاره‌ای که مورد بحث ما نیست.

اگرقضیهٔ ۶ درست باشد، آنگاه

$$\text{B} \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۶}} \text{A} \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۱}} \text{B}$$

می بینیم، از این حکم که گزارهٔ B نادرست است، نتیجه می‌شودکه B درست

---

* متمم مجموعه‌ای‌مانند $\mathcal{A}$ در صفحه، به مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی از صفحه گویندکه در $\mathcal{A}$ نیست. مثلامتمم نیم‌صفحهٔ بالا (با به‌حساب آوردن خود محور ox)، عبارتست از نیم صفحهٔ پایین (بدون در نظرگرفتن نقطه‌های محور ox) .

است. و این تنها وقتی ممکن است که B همیشه درست باشد.

اگر قضیهٔ ۷ درست باشد، آنگاه $A \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۱}} B \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۷}} A$

به‌زبان دیگر، از اینکه A درست است، نتیجه می‌شود که A نادرست است، یعنی A باید همیشه نادرست باشد.

۱۲. الف) ابتدا فرض می‌کنیم $x \geqslant 0$. در اینصورت $|x| = x$ و به معادلهٔ $3x = 3$ می‌رسیم که از آنجا $x = 1$. حالا فرض می‌کنیم $x \leqslant 0$. در اینصورت $|x| = -x$ و به‌دست می‌آید $-x = 3$ که از آنجا $x = -3$.
به این ترتیب $x_1 = 1$ و $x_2 = -3$.

ب) به ازای $x \geqslant 0$، به معادلهٔ $x^2 + 3x - 4 = 0$ می‌رسیم که دارای دو ریشهٔ $x_1 = 1$، $x_2 = -4$ است. شرط $x \geqslant 0$، تنها برای ریشهٔ اول صدق می‌کند.

به ازای $x \leqslant 0$ به دست می‌آید $x^2 - 3x - 4 = 0$ که از آنجا $x_1 = -1$ و $x_2 = 4$ پیدا می‌شود. شرط $x \leqslant 0$ تنهابا ریشهٔ اول می‌سازد.
به این ترتیب، دو جواب معادله عبارتند از $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$.

ج) فرض می‌کنیم $x < -\frac{1}{2}$. دراینصورت $|2x+1| = -(2x+1)$ و $|2x-1| = -(2x-1)$ و به دست می‌آید:

$-(2x+1) - (2x-1) = 2$ و از آنجا $x = -\frac{1}{2}$.

حالا فرض می‌کنیم $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ دراینصورت $|2x+1| = 2x+1$ و $|2x-1| = -(2x-1)$. به‌دست‌می‌آید: $2x+1-(2x-1) = 2$ که یك اتحاد است. یعنی، همهٔ عددهای واقع درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ در معادلهٔ ما صدق می‌کنند.

بالاخره فرض‌می‌کنیم $x > \frac{1}{2}$، در اینصورت $|2x+1| = 2x+1$ و $|2x-1| = 2x-1$. به دست می‌آید: $(2x+1)+(2x-1) = 2$ و از آنجا $x = \frac{1}{2}$.

به این ترتیب، همهٔ عددهای واقع درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$، ریشه

های معادله ما را تشکیل می‌دهند.

۱۳. الف) ابتدا x و y را مثبت می‌گیریم ، در اینصورت داریم : $|x|=x$ ، $|y|=y$ و $|x+y|=x+y$. در این‌حالت ، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

اگر x مثبت و y منفی باشد، بایددوحالت $x+y\geqslant 0$ و $x+y<0$ را به طور جداگانه بررسی کرد . در حالت اول داریم : $|x|=x$ ، $|y|=-y$ و $|x+y|=x+y$. نامساوی به‌صورت $x+y\leqslant x-y$ درمی‌آید که به دلیل منفی بودن y ، درست است.

درحالت‌دوم‌داریم: $|x|=x$ ، $|y|=-y$ و $|x+y|=-(x+y)$ و نامساوی به این صورت در می‌آید : $-x-y\leqslant x-y$ که با توجه به مثبت بودن x درست است .

حالتهای دیگر را می‌توان با تغییر علامتهای هر دو عدد x و y به حالتهایی تبدیل کرد که تا اینجا بررسی کردیم. علامتهای هردو عدد x و y را می‌توان تغییر داد ، زیرا در اینصورت ، نه $|x|$ ، نه $|y|$ و نه $|x+y|$ تغییر نمی کنند.

ب) دراینجا هم می‌توان، مثل مسأله الف)، همهٔ حالتهای ممکن را ، برای‌وضعی که x و y و $x-y$: روی‌محور عددی‌قرار دارند، بررسی کرد، ولی ما، این‌نامساوی را بااستفاده ازنامساوی $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ ثابت می کنیم. $x-y$ را به z نشان می‌دهیم ، در اینصووت $x=y+z$. چون داریم، $|y+z|\leqslant|y|+|z|$ ، بنابراین به روشنی معلوم می‌شود که $|x|\leqslant|y|+|x-y|$.

ج) دراینجا هم می‌توان نامساوی را ، با توجه به حالتهای مختلفی که پیش می‌آید، ثابت‌کرد، ولی ساده‌ترآنست که از نامساوی ب) استفاده کنیم. اگرداشته‌باشیم: $|x|\geqslant|y|$، نامساوی ما به‌همان نامساوی ب) تبدیل‌می‌شود. ولی اگر داشته باشیم : $|x|<|y|$ ، نامساوی ما به اینصورت درمی‌آید : $|x-y|\geqslant|y|-|x|$ و یا $|y-x|\geqslant|y|-|x|$ و این دوباره، همان نامساوی ب) است‌که درآن تنها نقش x و y با هم عوض شده است.

تبصره . این نامساوی را به طریق عینی‌تری هم می‌توان ثابت کرد. برای این منظور، از این مطلب استفاده‌کنیدکه مقدار $|x|$ برابر است با فاصلهٔ بین x و 0 روی محور عددی ، و مقدار $|x-y|$ برابر است با فاصلهٔ بین نقطه‌های x و y [به کتاب «روش مختصاتی و هندسهٔ چهار بعدی» مراجعه‌کنید].

۱۴. الف) نامساوی $\sqrt[n]{1000}<1/001$ را می‌توان به صورت $1000<(1+0/001)^{n}$ نوشت. طرف راست را،بنا بر دوجمله‌ای نیوتون

بازمی کنیم. به دست می‌آید :

$$(1+0/001)^n = 1+\frac{n}{1000}+\frac{n(n-1)}{2\times 1000^2}+\cdots+\frac{1}{1000^n}$$

از اینجا دیده می‌شود که برای $n>1$ ، مقدار $(1+0/001)^n$ ، در هر حال از $1+\frac{n}{1000}$ بیشتر است. بنابراین، وقتی n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، و مثلا $n=1000000$ داریم: $(1+0/001)^n>1000$ ، یعنی، به ازای $n=1000000$ ، نامساوی موردنظر برقرار است.

ب) شبیه حل مسألهٔ الف) ، نامساوی را به صورت $(1/001)^n>n$ می‌نویسیم و سمت‌راست تساوی را ، بنابر رابطهٔ نیوتون، بازمی کنیم. ازآنجا نتیجه می‌شود که به ازای $n>2$ ، نامساوی زیر برقرار است :

$$(1+0/001)^n>1+\frac{n}{1000}+\frac{n(n-1)}{2\times 1000^2}$$

ولی، وقتی که n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، این عبارت از n بیشتر می‌شود. در واقع، اگر داشته باشیم: $n-1>2\times 1000^2$ ، جملهٔ آخر سمت راست نامساوی بالا، از n بزرگتر می‌شود.

بنابراین به‌ازای $n=2\times 1000^2+2$ ، نامساوی $(1/001)^n>n$ برقرار خواهد بود که از آنجا، نامساوی اصلی هم برقرار خواهد بود :

$$\sqrt[n]{n}<1/001$$

ج) این اتحاد را در نظرمی گیریم:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

از اینجا دیده می‌شود که مقدار $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ، همیشه از $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ کوچکتر است. بنابراین، به ازای $n>25$ ، خواهیم داشت:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{10}$$

د) چنین‌عددی برای n وجود ندارد. زیرا در واقع، از نامساوی $\sqrt{n^2+n}-n<0/1$ به دست می‌آید $\sqrt{n^2+n}<n+0/1$ و

$$n^2+n<(n+0/1)^2=n^2+0/2n+0/01$$

و روشن است که این نامساوی درست نیست، زیرا، برای هر عدد طبیعی n داریم: $n>0/2n+0/01$.

۱۵. الف) ببینیم، وقتی که k ازلحاظ قدر مطلق به اندازهٔ کافی بزرگ شود، عبارت $\left|\frac{k^{3}-2k+1}{k^{4}-3}\right|$، چه وضعی پیدا می کند؟ روشن است که نقش اصلی در صورت کسر با k^{3} و در مخرج کسر با k^{4} است. بنابراین، به‌ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ k، این‌عبارت تقریباً برابر با $\left|\frac{k^{3}}{k^{4}}\right|=\frac{1}{|k|}$ است.

حالا ببینیم که مقدار دقیق عبارت ما، چقدر با مقدار تقریبی آن اختلاف دارد؟ این تبدیلها را انجام می‌دهیم:

$$\left|\frac{k^{3}-2k+1}{k^{4}-3}\right|=\left|\frac{k^{3}\left(1-\frac{2}{k^{2}}+\frac{1}{k^{3}}\right)}{k^{4}\left(1-\frac{3}{k^{4}}\right)}\right|=$$

$$=\frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^{2}}+\frac{1}{k^{3}}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^{4}}\right|}$$

$|k|\geqslant 2$ می گیریم، در اینصورت

$$\left|1-\frac{2}{k^{2}}+\frac{1}{k^{3}}\right|\leqslant 1+\frac{2}{k^{2}}+\frac{1}{|k|^{3}}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}<2$$

$$\left|1-\frac{3}{k^{4}}\right|\geqslant 1-\frac{3}{k^{4}}\geqslant 1-\frac{3}{16}>\frac{1}{2}$$

به این ترتیب وقتی که $|k|\geqslant 2$ باشد، داریم:

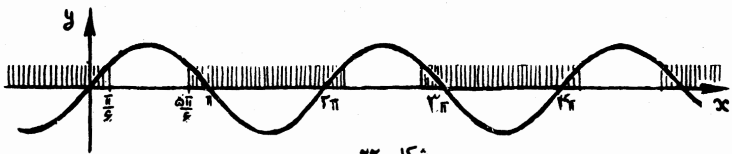
$$\frac{1}{|k|}\cdot\frac{\left|1-\frac{2}{k^{2}}+\frac{1}{k^{3}}\right|}{\left|1-\frac{3}{k^{4}}\right|}<\frac{1}{2}\times\frac{2}{\frac{1}{2}}=2$$

بنابراین، به ازای $|k|\geqslant 2$، عبارت ما از ۲ تجاوز نمی کند. این می‌ماند که مقدار عبارت را برای $k=-1$ و ۰ و ۱ محاسبه کنیم. در این حالتها، عبارت ما به‌ترتیب برابر با ۱، $\frac{1}{3}$ و ۰ می‌شود. به این ترتیب، عدد مجهول C وجود دارد و مثلا می‌توان فرض کرد:

$C=2$.

تبصره . با همین روش می‌توان برآورد دقیقتری از عبارت کرد و به این نتیجه رسید که حداکثر مقدار آن برابر است با ۱ ، که به ازای $k=-1$ به دست می‌آید. خودتان این نتیجه‌گیری را به دست آورید.

ب) عبارت ما ، از حاصلضرب دو عدد k و $\sin k$ تشکیل شده است، که از آنها ، k را می‌توان به دلخواه بزرگ اختیار کرد. بنابراین، اگر عدد دوم (یعنی $\sin k$)، خیلی کوچك نباشد، همهٔ حاصلضربها ، عددهایی بزرگ خواهند بود. مثلاً، اگر $\sin k$ بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد ، مجموعهٔ نقطه‌های x که



شکل ۲۲

دارای این خاصیت هستند (یعنی برای آنها $\sin x>\frac{1}{2}$) ، شامل بینهایت فاصله به صورت زیرند:

$$2\pi n+\frac{\pi}{6}<x<2\pi n+\frac{5\pi}{6}$$

که در آنها ، n عددی دلخواه و درست است (شکل ۲۲) . طول هر فاصله برابر با $\frac{2\pi}{3}$ است. چون این طول از واحد بزرگتر است، در داخل هر کدام از این فاصله‌ها، دست‌کم یك عدد درست وجود دارد. از اینجا نتیجه می‌شود که برای هر عدد C ، مجموعهٔ نامتناهی از عددها وجود دارد که برای آنها داریم: $k\sin k>C$. در واقع، برای هر عدد k ، که در فاصلهٔ مذکور وجوددارد، نامساوی $\sin k>\frac{1}{2}$ برقرار است . بنابراین ، اگر عدد طبیعی k از $2C$ بزرگتر باشد، وضمناً در داخل یکی از فاصله‌های مذکور باشد، خواهیم داشت: $k\sin k>C$ و روشن است که تعداد چنین عددهایی بینهایت است.

۱۶. الف) فرض کنید طول واقعی یکی از ضلعهای مستطیل (برحسب سانتیمتر) برابر a و دیگری برابر b باشد؛ نتیجهٔ اندازه‌گیری خود را به $a+x$ و $b+y$ نشان می‌دهیم. بنابرشرط، مقادیر $|x|$ و $|y|$ ، از ۱ تجاوز نمی‌کند. در اینصورت، اشتباه در محاسبهٔ محیط برابر است با

$$2(a+x)+2(b+y)-(2a+2b)=2x+2y$$

با توجه به نامساوی مسألهٔ ۱۳ـ الف) می‌توان نوشت:

$$|2x+2y|\leqslant 2|x|+2|y|\leqslant 4$$

اشتباه در محاسبهٔ مساحت برابر است با

$$(a+x)(b+y)-ab=xy+ay+bx$$

از اینجا دیده می‌شود که اشتباه در محاسبهٔ مساحت، به اندازهٔ ضلعها مربوط می‌شود. مثلا، اگر گفتگو از صفحه‌کاغذی باشد که در آن $a\approx 15$ و $b\approx 20$، مقدار اشتباه از ۳۶ سانتیمتر مربع تجاوز نمی‌کند.

$$|ay+bx+xy|\leqslant a|y|+b|x|+|x|\cdot|y|\leqslant 15+20+1=36$$

ولی، اگر بحث برسر مساحت زمین فوتبال باشد، یعنی $a\approx 5000$ و $b\approx 8000$، مقدار اشتباه ممکن است از یك مترمربع تجاوز کند.

ب) از همان قراردادهای قسمت الف) استفاده می‌کنیم. بنابر شرط، $|x|<0/01a$ و $|y|<0/01b$. از آنجا

$$|2x+2y|\leqslant 2|x|+2|y|\leqslant 0/01(2a+2b)$$

یعنی، اشتباه در محاسبهٔ محیط، از ۱٪ تجاوز نمی‌کند. سپس

$$|ay+bx+xy|\leqslant a|y|+b|x|+|xy|\leqslant$$
$$\leqslant 0/01ab+0/01ba+0/0001ab=0/0201ab$$

یعنی، اشتباه در محاسبهٔ مساحت از ۲/۰۱ درصد و یا در عمل، از ۲٪ تجاوز نمی‌کند.

۱۷. الف) دو جملهٔ مجاور دنباله را مقایسه می‌کنیم.

$$x_n-x_{n+1}=\frac{n^2}{2^n}-\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}=\frac{n^2-2n-1}{2^{n+1}}=\frac{(n-1)^2-2}{2^{n+1}}$$

وقتی‌که $(n-1)^2<2$ باشد (یعنی به‌ازای $n=1$ ، ۲)، این عبارت منفی است، یعنی $x_n<x_{n+1}$. وقتی که $(n-1)^2>2$ باشد (یعنی به‌ازای $n\geqslant 3$)، این‌عبارت مثبت است، یعنی $x_n>x_{n+1}$. از اینجا، x_3 بزرگترین عدد، دراین دنباله است.

ب) این‌مسأله را هم می‌توان، مثل‌مسألهٔ قبل وبا بررسی x_n-x_{n+1}، حل کرد. خودتان این راه را عمل کنید. ما، مسأله را با روش دیگری حل می‌کنیم.

$$x_n=\frac{n}{100+n^2}=\frac{n}{(10-n)^2+20n}=\frac{1}{20+\left(\frac{10}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)^2}$$

مخرج کسراخیر، به‌ازای‌هرمقدار دلخواه n، از ۲۰ کمتر نیست، وتنهادرحالتی

که داشته باشیم $\frac{10}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}=0$ ، برابر ۲۰ می‌شود، (یعنی به ازای $n=10$)، $x_{10}=\frac{1}{20}$ بزرگترین عدد دراین دنباله است.

ج) دوجملهٔ متوالی دنباله را مقایسه می‌کنیم:

$$x_n-x_{n+1}=\frac{1000^n}{n!}-\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1000^n}{(n+1)!}(n+1-1000)$$

از اینجا دیده می‌شود که به ازای $n<999$ داریم $x_n<x_{n+1}$ ، به ازای $x=999$ داریم: $x_n=x_{n+1}$ و به ازای $n>999$ داریم: $x_n>x_{n+1}$. یعنی بزرگترین جملهٔ این دنباله عبارتست از $x_{999}=x_{1000}$.

۱۸. روش اول. داریم:

$$x_n-x_{n+1}=(n^2-5n+1)-[(n+1)^2-5(n+1)+1]=$$
$$=4-2n$$

از آنجا

به ازای $n<2$ داریم: $x_n-x_{n+1}>0$

به ازای $n=2$ داریم: $x_n=x_{n+1}$

به ازای $n>2$ داریم: $x_n-x_{n+1}<0$

یعنی کوچکترین جملهٔ دنباله عبارتست از $x_2=x_3$.

روش دوم. داریم:

$$x_n=n^2-5n+1=(n-2/5)^2-5/25$$

چون، n عددی است درست، کمترین مقدار $(n-2/5)^2$ به ازای $n=2$ و $n=3$ به دست می‌آید.

ب) هرجمله از این دنباله، برابر است با عکس جملهٔ متناظر آن در مسألهٔ ۱۷ـب). به حل آن مسأله مراجعه کنید.

ج) روش اول. چند جملهٔ دنباله را می‌نویسیم:

$$6,\ 2,\ -2,\ 4,\ 10,\ 6,\ 2,\ 8,\ \ldots$$

تا همین جا می‌توان گمان برد که کوچکترین جمله، همان $x_3=-2$ است. برای اثبات، x_n را با -2 ، برای $n>3$ مقایسه می‌کنیم:

$$x_n-(-2)=n+2+5\sin\frac{\pi n}{2}>5+5\sin\frac{\pi n}{2}\geqslant 0$$

روش دوم. دنبالهٔ خود را به سه دنباله تقسیم می‌کنیم و هرکدام را به طور جداگانه، مورد بررسی قرارمی‌دهیم. دنبالهٔ نخست، از جمله‌های ردیف زوج تشکیل شده است:

$$x_{2k} = 2k + 5 \sin \pi k = 2k$$

دنبالهٔ دوم، از جمله‌های با شماره‌های $n = 4k + 1$ تشکیل شده است:

$$x_{4k+1} = 4k + 1 + 5 \sin \left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 4k + 6$$

دنبالهٔ سوم، از جمله‌های با شماره‌های $n = 4k - 1$ تشکیل شده است:

$$x_{4k-1} = 4k - 1 + 5 \sin \left(2\pi k - \frac{\pi}{2}\right) = 4k - 6$$

هرسه‌دنباله، تصاعدهای حسابی‌صعودی‌اند و کوچکترین جملهٔ هر کدام ازآنها، نخستین‌جملهٔ آنهاست؛ وکوچکترین عدد از بین این سه جملهٔ نخست، عبارتست از $x_3 = -2$.

۲۱. الف) فاصلهٔ بسته $[a, b]$ را یك تله فرض کنید. این فرض، به معنای آنست که درخارج این‌فاصله، تعداد محدودی از جمله‌های دنباله وجود دارد. اگر این فاصله. ظرف نباشد، باید در داخل این فاصله هم، به تعداد محدودی ازجمله‌های دنباله وجود داشته باشد. ولی، رویهم در تمامی دنباله، تعداد جمله‌ها، نامحدود است. این‌تناقض ثابت‌می کندکه فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ باید ظرف هم باشد.

ب) مثلا، دنبالهٔ b وفاصلهٔ بستهٔ B ازمسألهٔ ۲۲، جمله‌های اول، سوم، پنجم، ... این دنباله در داخل فاصله و جمله‌های دوم، چهارم، ششم، ... در خارج این فاصله است، بنابراین، این فاصله ظرف هست، ولی تله نیست.

۲۳. الف) مثلا این دنباله

$$1, 3, \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 2\frac{1}{n}, \ldots$$

ب) چنین دنباله‌ای وجود ندارد. فرض کنیم که برای دنباله‌ای، فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$، تله باشد. در اینصورت، در خارج این فاصله، تنها تعداد محدودی ازجمله‌های دنباله، می‌تواند وجود داشته باشد. و این به‌معنای آنست که در داخل‌فاصلهٔ بستهٔ $[2, 3]$ هم تعداد محدودی از جمله‌های دنباله، باقی می‌ماند. بنابراین، فاصلهٔ بستهٔ $[2, 3]$ ظرف نیست و به طور بدیهی (مسألهٔ ۲۱ــ الف) را ببینید) تله هم نیست.

۲۴. الف) فاصلهٔ بستهٔ به طول ۱، به هرنحوی که باشد، با یکی از فاصله‌های بستهٔ $[0, 1]$ یا $[9, 10]$ برخورد نخواهد داشت. مثلا، فرض کنید که فاصلهٔ ما، با فاصلهٔ بستهٔ $[0, 1]$، نقطه‌های مشترکی‌نداشته باشد. اگر فاصلهٔ ما، یك تله باشد، باید درخارج آن، تعداد محدودی از جمله‌های‌دنباله وجود داشته باشد، و منجمله در فاصلهٔ $[0, 1]$. و این نتیجه، با فرض‌ما، که

فاصلهٔ بستهٔ [۰ ، ۱] یک ظرف است، متناقض است.

ب) این دو دنباله را درنظر بگیرید :

$$۱)\quad ۱ ، ۹ ، \frac{۱}{۲} ، ۹\frac{۱}{۲} ، \frac{۱}{۳} ، ۹\frac{۲}{۳} ، \ldots ، \frac{۱}{n} ، ۹\frac{n-۱}{n} ، \ldots$$

$$۲)\quad ۰ ، ۱۰ ، \frac{۱}{۲} ، ۹\frac{۱}{۲} ، \frac{۲}{۳} ، ۹\frac{۱}{۳} ، \ldots ، \frac{n-۱}{n} ، ۹\frac{۱}{n} ، \ldots$$

برای دنبالهٔ اول، تله‌ای به‌طول ۹ وجود ندارد (تحقیق‌کنید‌که فاصله‌های بستهٔ $\left[۰ ، \frac{۱}{۳}\right]$ و $\left[۹\frac{۲}{۳} ، ۱۰\right]$ برای این دنباله، ظرف هستند. ازآنجا، با توجه به مسالهٔ الف) ثابت می‌شود که تله‌ای به طول ۹، وجود ندارد).

برای دنبالهٔ دوم ، فاصلهٔ بسته $\left[\frac{۱}{۲} ، ۹\frac{۱}{۲}\right]$ ، یک تله است ، زیرا همهٔ جمله‌های این دنباله ــ از جملهٔ سوم به بعد ــ دراین فاصله قراردارد .

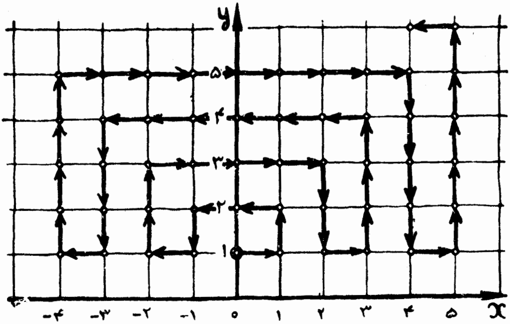
۴۵. الف) دنبالهٔ

$$۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، \ldots ، n ، \ldots$$

حتی یک ظرف هم ندارد ، زیرا در هرفاصله‌ای به طول I ار آن، بیش از $I+۱$ جمله از دنباله وجود ندارد.

ب) ما دنباله‌ای خواهیم ساخت‌که در بین جمله‌های آن، همهٔ عددهای گویا وجود داشته باشد. چون در هرفاصلهٔ دلخواهی از این دنباله ، بینهایت عددگویا وجود دارد، بنابراین برای چنین دنباله‌ای ، هرفاصلهٔ بستهٔ دلخواه ، یک‌ظرف است. برای ساختن این دنباله، باید روی‌خانه‌های یک‌کاغذشطرنجی، به ترتیبی که در شکل ۲۳ نشان داده شده است، حرکت‌کرد.

هر بار که از رأس یک خانه عبور می کنیم، یکی از جمله‌های دنباله را



شکل ۲۳

می‌نویسیم. اگر مختصات این رأس (x, y) باشد (از شکل ۲۳ دیده می‌شود که x و y، عددهایی درست و ضمناً $y>0$ است)، جملهٔ متناظر دنبالهٔ ما برابر با $\frac{x}{y}$ است. به این ترتیب، به‌چنین دنباله‌ای می‌رسیم.

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots$$

ثابت می‌کنیم که در این دنباله، همهٔ عددهای گویا وجود دارد.

هرعددگویا را می‌توان به صورت $\frac{p}{q}$ نوشت، که در آن p و q، عددهایی درست و $q>0$ است. وقتی که روی صفحه، به ترتیبی که در شکل می‌بینیم، حرکت کنیم، به هرحال به نقطه‌ای با مختصات (p, q) می‌رسیم، که جملهٔ متناظرآن در دنبالهٔ ما، برابر $\frac{p}{q}$ است.

در واقع، دراین دنباله، به هرعددگویا، بینهایت بار برخورد می‌کنیم، زیرا هر عددگویا را، به بینهایت طریق به‌صورت $\frac{p}{q}$ می‌توان نوشت (مثلا $\frac{2}{3}$، $\frac{4}{6}$، $\frac{6}{9}$، ...)، با وجود این، نشان دادن راهی برای تعیین شماره ردیف هر عددگویا، در این دنباله، کار ساده‌ای نیست. خودتان آزمایش کنید وشمارهٔ ردیف عددهای $1\frac{1}{3}$ و $-\frac{5}{7}$ را پیدا کنید. صدمین جملهٔ این دنباله، چه عددی است؟

۲۷. الف) پاره خطی به مرکز نقطهٔ a در نظرمی‌گیریم و طول آنرا 2ε می‌نامیم. بنا برتعریف حد، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی‌که برای هر $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد. این نامساوی به معنای آنست که نقطهٔ x_n برپاره خط ما قرار دارد. به‌این‌ترتیب، در خارج پاره‌خط ما، بیش از k جملهٔ دنباله، وجود ندارد. یعنی، این پاره خط، یك تله است.

ب) عدد مثبت دلخواه ε را در نظرمی‌گیریم. پاره خطی به مرکز a و با طولی کوچکتر از 2ε را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. بنا برفرض، این پاره خط، یك تله است. بنا براین، در خارج آن، تنها تعداد محدودی از جمله‌های دنباله، قراردارد. k را، بزرگترین شمارهٔ ردیف این جمله‌ها می‌گیریم (اگر در خارج پاره خط، هیچ جمله‌ای از دنباله وجود نداشته باشد، $k=0$ می‌شود). در اینصورت، برای هر $n>k$، عضو x_n برپاره خط ما قرار می‌گیرد، یعنی نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقراراست: به‌این ترتیب ثابت کردیم که a، حددنبالهٔ $\{x_n\}$ است.

۲۸. الف) پاره خطی به مرکز نقطهٔ a در نظر می‌گیریم وطول آنرا با ۲ε نشان می‌دهیم. بنا بر تعریف حد، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی که به ازای $n>k$ ، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد. این، به معنای آنست که همهٔ جمله‌های دنباله که شمارهٔ ردیفی بیشتر از k دارند، بر پاره خط مفروض ما قراردارند.

حالا، پاره‌خطی‌را درنظر می‌گیریم که شامل نقطهٔ a نباشد. فاصلهٔ نقطهٔ a تا نزدیکترین انتهای پاره خط را ، ε می‌نامیم . بنا بر تعریف حد ، عددی مانند k وجود دارد ، به نحوی که برای $n>k$ ، نامساوی $|x-a|<\varepsilon$ برقرار باشد. و این به‌معنای آنست که به‌ازای $n>k$، عضو x_n ، به‌نقطهٔ a نزدیکتر است تا به‌نزدیکترین انتهای پاره خط مفروض، به این ترتیب، همهٔ عضوهائی که شمارهٔ ردیفی بیشتراز k داشته باشند، در خارج این پاره خط قراردارند؛ یعنی ، بر پاره خط ما ، نمی‌تواند مجموعه‌ای نامتناهی از جمله‌های دنباله قرار گیرد.

ب) برای دنبالهٔ

$$۱ , \frac{۱}{۲} , ۳ , \frac{۱}{۴} , \dots , n^{(-۱)^{n-۱}} , \dots$$

هرپاره خط به‌مرکز ٥ ، یك ظرف‌است. در واقع، جمله‌های ردیف زوج این دنباله عبارتند از

$$\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۶} , \frac{۱}{۸} , \dots , \frac{۱}{۲n}$$

و روشن است که به سمت صفرمیل می کند. به این ترتیب، در هر پاره خط به مرکز نقطهٔ ٥ ، مجموعهٔ بینهایت جمله از این دنباله وجود دارد (حل مسألهٔ الف‌را ببینید). و این ، به معنای آنست که این پاره خط، ظرفی برای دنبالهٔ ماست. حالا: ثابت می کنیم که هیچ پاره خط دیگری که شامل نقطهٔ ٥ نباشد ، ظرف‌نیست. در واقع، برای زیر دنباله‌ای که از جمله‌های ردیف زوج تشکیل شده‌است، چنین پاره خطی نمی‌تواند ظرف باشد (حل‌مسألهٔ الف) را ببینید)؛ برای زیر دنباله‌ای هم که از جمله‌های ردیف فرد تشکیل شده است (یعنی ۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ...)، اصولا، هیچ پاره خطی‌نمی‌تواند ظرف‌باشد (این‌حکم را خودتان ثابت کنید). بنا براین، برهرپاره خطی که شامل‌نقطهٔ ٥ نباشد، تنها تعداد محدودی از جمله‌های ردیف زوج و تعداد محدودی ازجمله‌های ردیف فرد، وجود دارد ، یعنی برچنین پاره خطی، تعداد محدودی جمله از دنبالهٔ ما قراردارد و در نتیجه، نمی‌تواند ظرف باشد .

به‌این ترتیب، دنبالهٔ $x_n=n^{(-1)^{n-1}}$ و عدد ۰ ، با شرطهای مسالهٔ ۲۸ — ب)می‌سازد. ولی، عدد ۰ ، حداین‌دنباله‌نیست: زیرا، درغیر اینصورت می‌بایست برای همهٔ جمله‌های دنباله ، از ردیفی به بعد ، نامساوی $|x_n|<\varepsilon$ برقرار باشد، ولی ، این نامساوی برای هیچکدام از جمله های ردیف فرد صدق نمی کند.

تبصره . دنبالهٔ

$$n^{(-1)^{n-1}}$$

را ، می‌توان ترکیبی از دو دنبالهٔ ساده‌تر دانست:

$$۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، \ldots ، ۲n-۱ ، \ldots$$

$$\frac{۱}{۲} ، \frac{۱}{۴} ، \frac{۱}{۶} ، \ldots ، \frac{۱}{۲n} ، \ldots$$

این روش ساختن دنباله‌ها، اغلب سودمند است. مثلا ، برای موردی‌که بخواهیم دنباله‌ای بسازیم‌که برای آن، هرکدام از دو فاصلهٔ بستهٔ مفروض ، ظرف باشد (مساله ۲۳— ب) را ببینید)، می‌توان دو دنباله را به هم ترکیب‌کرد‌که برای یکی ازآنها، فاصلهٔ اول و برای دیگری، فاصلهٔ دوم، ظرف باشد.

۲۹. در حل مسالهٔ ۲۸— الف) ثابت‌کردیم که اگر $x_n \longrightarrow a$ ، برای $n \longrightarrow \infty$ ، هیچ فاصلهٔ بسته‌ای که شامل a نباشد، نمی‌تواند ظرف باشد . بنابراین، حکم ما به سادگی، و از طریق برهان خلف ثابت می‌شود. خودتان اثبات را تنظیم کنید.

۳۰. برای اینکه ثابت کنیم دنبالهٔ $\{x_n\}$ ، دارای حدی برابر عدد a است، باید نشان دهیم که برای هر عدد مثبت ε ، می‌توان عددی مانند k پیدا کرد‌که‌به‌ازای $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرارباشد. اغلب؛ می‌توان دستوری به دست‌آورد‌که k را برحسب ε بیان کند.

الف) $x_n=\frac{(-۱)^{n-1}}{n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=۰$. از آنجا‌که $|x_n|=\frac{۱}{n}$ ،

به عنوان k می‌توان $\frac{۱}{\varepsilon}$ را انتخاب کرد . در واقع، به ازای $n>\frac{۱}{\varepsilon}$ ،

نامساوی $|x_n|=\frac{۱}{n}<\varepsilon$ برقرار است.

تبصرهٔ ۱ . عدد k، برحسب ε ، به‌صورت یك‌ارزشی به دست‌نمی‌آید.

مثلا دراین مسأله، می‌توان k را برابر $\frac{۲}{\varepsilon}$ یا $۱+\frac{۱}{\varepsilon}$ گرفت (و به‌طورکلی هرعددی‌که بزرگتر از $\frac{۱}{\varepsilon}$ باشد). گاهی بهتراست‌که k راخیلی «اقتصادی»

انتخاب نکنیم (که ممکن است با عبارت بسیار پیچیده‌ای برحسب ε بیان شود) و به دنبال عبارت ساده‌تری برویم. مثلا برای اینکه ثابت کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۳+۰/۶n+۳/۲}=۰$ ، می‌توان از این مطلب استفاده کرد که $x_n<\frac{۱}{n^۳}<\frac{۱}{n}$ و درنتیجه، k را برابر $\frac{۱}{\varepsilon}$ گرفت. و این ، خیلی ساده‌تر از آنست که «اقتصادی‌ترین» مقدار را برای k در نظر بگیریم که برابر است با

$$k=\sqrt[۳]{۱/۶+\sqrt{۲/۵۵۲-\frac{۱/۶}{\varepsilon}+\frac{۱}{۴\varepsilon^۲}}}+\sqrt[۳]{۱/۶-\sqrt{۲/۵۵۲-\frac{۱/۶}{\varepsilon}+\frac{۱}{۴\varepsilon^۲}}}$$

و از حل معادلهٔ درجه سوم زیر به دست آمده است:

$$n^۳+۰/۶n+۳/۲=\frac{۱}{\varepsilon}$$

حالتهایی هم وجود دارد که برای «اقتصادی‌ترین» مقدار k ، اصلا نمی‌توان دستوری پیدا کرد، درحالیکه «با مقداری اضافی» به‌سادگی به‌دست می‌آید

تبصره ۲. روشن‌است که اگر برای‌یك ε مفروض، بتوان مقدار k راپیدا کرد، برای عددهای بزرگتر k هم می‌توان استدلال را دنبال کرد. بنابراین، در تعریف حد، می‌توان k را عددی درست به حساب‌آورد.

ب) $x_n=\frac{۳^n-۱}{۳^n}=۱-\frac{۱}{۳^n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=۱$.

چون $|x_n-۱|=\frac{۱}{۳^n}$، بنابراین به‌عنوان k می‌توان $\log_۳\left(\frac{۱}{\varepsilon}\right)$ را انتخاب کرد.

ج) اگر از دستور مربوط به مجموع جمله‌های تصاعد هندسی استفاده کنیم، داریم:

$$x_n=۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}=۲-\frac{۱}{۲^n}$$

از اینجا معلوم می‌شود که : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=۲$ وبه عنوان k هم می‌توان، عدد $\log_۲\left(\frac{۱}{\varepsilon}\right)$ را انتخاب کرد.

د) این دنباله حدی ندارد، زیرا، برای هر a و هر ε، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$، تنها برای تعداد محدودی از ردیفهای n، برقرار است.

ه) $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$، زیرا $|x_n - 1|$، در اینحالت متحد با صفر و نامساوی $|x_n - 1| < \varepsilon$ برای هر عدد مثبت ε و برای همهٔ مقادیر n برقرار است.

و) جمله‌های ردیف زوج وجمله‌های ردیف فرد را، جدا ازهم بررسی می کنیم. برای‌حالت $n = 2m$ داریم: $x_n = \frac{1}{m}$. بنابراین، به‌ازای $m > \frac{1}{\varepsilon}$ (یعنی $n > \frac{2}{\varepsilon}$)، نامساوی $|x_n| < \varepsilon$ برقراراست، وقتی هم که n عددی‌فرد باشد، x_n برابرصفر می‌شود. درنتیجه، نامساوی $|x_n| < \varepsilon$ برای همهٔ جمله‌های ردیف‌فردهم صدق می کند. به این ترتیب؛ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$، و برای k می‌توان عدد $\frac{2}{\varepsilon}$ را انتخاب کرد.

ز) بنابر دستور مجموع جمله‌های تصاعد هندسی داریم:

$$\underbrace{0/2220002}_{n\ \text{مرتبه}} = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{2}{10^n} = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

ازآنجا $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{9}$، و به‌عنوان k می‌توان $\log\left(\frac{2}{9\varepsilon}\right)$ را انتخاب کرد (و یا به‌طور ساده $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$؛ تبصرهٔ مربوط به حل مسالهٔ الف)را ببینید).

ح) حدی وجود ندارد. در واقع، وقتی که n برابر $(180m)$ درجه باشد، $x_n = 0$ می‌شود واگر $n = 90^\circ + 360^\circ m$، درآنصورت $x_n = 1$، اگر این دنباله بخواهد، حدی مساوی a داشته باشد، باید با آغاز از ردیفی مثل n_0، مثلا نامساوی $|x_n - a| < \frac{1}{4}$ برقرار باشد. از آنجا باید به نوبهٔ خود، برای $n_1 > n_0$ و $n_2 > n_0$ هم، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$|x_{n_1} - x_{n_2}| \leqslant |x_{n_1} - a| + |a - x_{n_2}| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ولی، در دنبالهٔ ما، جمله‌هایی وجود دارد (هر قدر که در دنباله جلو برویم)، که مقدار آنها از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است.

ط) چون $1 \geqslant |\cos n^\circ|$، بنا براین $|x_n| \leqslant \frac{1}{n}$. از آنجا ، معلوم می‌شود

که ، $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ و برای هم می‌توان $\frac{1}{\varepsilon}$ را انتخاب کرد.

ی) حد وجود ندارد. اگر a ، حد دنباله باشد، باید ازجمله‌ای به‌بعد، مثلا نامساوی $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ برقرار باشد. دراینصورت باید داشته باشیم:

$$|x_n - x_{n+1}| \leqslant |x_n - a| + |a - x_{n+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

درحالیکه، تفاضل هردو جملهٔ متوالی از دنبالهٔ ما، بزرگتر از واحد است.

۳۱. فرض می کنیم، دوعدد متفاوت a و b، حدیك دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشند. فاصلهٔ بین این دو نقطه را 2ε می‌نامیم. اگر a ، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، باید عددی‌مثل k_1 پیداشود، به‌نحوی که‌به‌ازای $n > k_1$، نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرار باشد. به همین ترتیب، اگر b حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد ، عددی مثل k_2 وجود دارد ، به نحوی که به ازای $n > k_2$ داشته باشیم : $|x_n - b| < \varepsilon$. بنابراین، اگرشمارهٔ ردیف n، از k_1 و k_2 بزرگترباشد، باید هردونامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ و $|x_n - b| < \varepsilon$ درست باشد. و این ممکن نیست، زیرا $|a - b| = 2\varepsilon$.

۳۲. الف) ثابت می کنیم که هرپاره خط به مرکز نقطهٔ a ، یك ظرف است. طول پاره خط را برابر 2ε می گیریم. باید ثابت‌کنیم که بینهایت‌جمله، از دنبالهٔ ما ، در این پاره خط افتاده است ، یعنی ، نامساوی $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$ برقرار است. اگراینطور نباشد، به معنای آنست‌که برپاره خط ما، تنهاتعداد محدودی، ازجمله‌های دنباله قرارگرفته است.

k را ، بزرگترین شمارهٔ ردیف این جمله‌ها فرض‌می کنیم (اگر برپاره خط ما، هیچ‌جمله‌ای ازدنباله نباشد، درآنصورت $k = 0$). دراینصورت، همهٔ جمله‌هائی‌که اندیس بزرگتر از k دارند ، درخارج پاره خط قرارمی گیرند. ولی، این‌مطلب: تعریف نقطهٔ حدی را نقض می کند‌که: برای هر k، اندیسی مانند $n > k$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که‌برای آن داشته‌باشیم: $|x_n - a| < \varepsilon$، یعنی x_n در داخل‌پاره خط واقع‌است.

ب) حالا ، عکس قضیه را در نظرمی گیریم ، یعنی فرض می کنیم که a نقطهٔ حدی دنباله نباشد. این به معنای آنست‌که برای عددی مانند ε و عددی مانند k، اندیسی‌مثل $n > k$ پیدانمی‌شود که‌برای‌آن‌نامساوی $|x_n - a| < \varepsilon$ برقرارباشد. به‌زبان دیگر، برپاره خطی به‌مرکز نقطهٔ a ، تنها تعدادمحدودی

(که از k تجاوز نمی‌کند) ازجمله‌های دنباله قراردارد. به این ترتیب، نقض فرض را به‌دست آوردیم که بنابر آن، هر پاره خطی به مرکز نقطهٔ a، برای $\{x_n\}$ ظرف است، یعنی شامل بینهایت جمله از دنبالهٔ ماست.

۳۳. روش اول. فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. برای عدد مثبت و مفروض ε، عددی‌مثل k_0 وجود دارد، به‌نحوی که به ازای هر $n>k_0$، این‌نامساوی برقرار باشد.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

حال، عدد دلخواه k را در نظر بگیرید. اندیس n را طوری انتخاب می‌کنیم که از k_0 و k_1 بزرگترین باشد. می‌بینیم که نامساویهای مورد نظرما برقرار است:

$$n>k \text{ و } |x_n - a| < \varepsilon$$

روش دوم. این‌مسأله، نتیجه‌ای ازحل‌مسأله‌های ۲۷ــ الف)، ۲۱ ــ الف) و ۳۲ــ ب) است.

۳۴. الف) دنبالهٔ $x_n = \frac{n+1}{n}$: حدی برابر ۱ دارد. یعنی، عدد ۱، نقطهٔ حدی برای این دنباله است (مسالهٔ ۳۳ را ببینید)، و دنباله، نقطه‌های حدی دیگری ندارد (مسأله‌های ۲۸ــ الف) و ۳۲ــ الف) را ببینید).

ب) روشن‌است که نقطه‌های ۱+ و ۱ــ، نقطه‌های حدی برای‌دنبالهٔ $x_n = (-1)^n$ هستند. برای هرنقطهٔ دیگر a، می‌توان چنان پاره خطی به مرکز a ساخت، که درآن، حتی یکی از جمله‌های دنباله، وجود نداشته‌باشد. به این ترتیب، دنبالهٔ ما، نقطهٔ حدی دیگری ندارد.

ج) چون تابع $\sin x^\circ$، دورهٔ تناوبی برابر ۳۶۰ درجه دارد، دراین دنباله، به‌هرکدام ازعددهای ۰، $\pm\sin 1^\circ$، $\pm\sin 2^\circ$، ...، $\pm\sin 89^\circ$ و ۱$\pm$، بینهایت مرتبه برخورد می‌کنیم. بنابراین، هر کدام از این نقطه‌ها، یك نقطهٔ حدی برای دنباله‌اند. اگرعدد a، برهیچکدام از این ۱۸۱ عدد منطبق نباشد، می‌توان پاره خطی به‌مرکز a، چنان ساخت که شامل حتی یکی از جمله‌های دنباله نباشد. (برای این منظور، کافی است طول پاره خط را کوچکتر از فاصلهٔ نقطهٔ a تا نزدیکترین عدد به ازآن ــ از این ۱۸۱ عدد ــ بگیریم.) بنابراین، نقطه‌های حدی دیگری دراین دنباله وجود ندارد.

د) بهتر است که این دنباله را، به صورت ترکیبی از دو دنبالهٔ $y_n = \frac{1}{2n-1}$ و $z_n = 2n$ درنظر بگیریم. دنبالهٔ اول، دارای یك‌نقطه حدی.

یعنی ۰ ، است، و دنبالهٔ دوم، نقطهٔ حدی ندارد . (این دو حکم را خودتان ثابت کنید.) وحالا ثابت‌می کنیم که نقطهٔ a ، وقتی و تنها وقتی، نقطهٔ حدی‌برای دنباله اصلی است که دست‌کم ، برای یکی از دو دنبالهٔ $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$، نقطه حدی باشد. در واقع، اگر از نتیجه مسألهٔ ۳۲ استفاده کنیم، این باقی‌می‌ماند که حکم کاملا روشن زیر را ثابت کنیم، هرپاره خط، وقتی وتنها وقتی، برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ ظرف است که دست‌کم برای یکی از دنباله‌های $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ ظرف باشد.

تبصره. به همین‌ترتیب، می‌توان قضیهٔ کلی‌تری را هم ثابت‌کرد: اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از ترکیب تعداد محدودی دنباله‌های $\{y_n\}$ ، $\{z_n\}$ ، ... ، $\{l_n\}$ تشکیل شده باشد ، در اینصورت مجموعهٔ نقطه‌های حدی برای $\{x_n\}$، از اجتماع مجموعه‌های نقطه‌های حدی برای $\{y_n\}$، $\{z_n\}$، ... ، $\{l_n\}$ بدست‌می‌آید.

و) اگرعدد a درشرط $0 \leqslant a \leqslant 1$ صدق کند، روی هر پاره‌خطی به‌مرکز a ، بینهایت جمله از دنبالهٔ ما قراردارد. در واقع، اگرطول پاره خط مساوی 2ε باشد،برای‌هر $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ، بین گروه‌جمله‌های $\frac{1}{n}$، $\frac{2}{n}$، ... ، $\frac{n-1}{n}$، دست‌کم یکی، برپاره خط ما قرار دارد. اگرهم $a<0$ یا $a>1$ باشد، می‌توان پاره خطی به مرکز نقطهٔ a ساخت، به نحوی‌که شامل حتی یکی ازجمله‌های‌دنباله نباشد.

بنابراین، همهٔ نقطه‌های واقع در فاصلهٔ بستهٔ $[0 , 1]$ ، نقطه‌های حدی هستند، و به جزآنها، نقطهٔ حدی دیگری وجود ندارد.

۳۵. الف) فرض کنید دنبالـهٔ $\{x_n\}$ دارای حدی مساوی x_0 باشد. فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ را به مرکز نقطهٔ x_0 در نظرمی گیریم. بنابر تعریف حد، و با آغاز از ردیفی به بعد، نامساوی $|x_n - x_0| < \frac{b-a}{2}$ برقرار است.

یعنی، در بیرون پاره خط، تنها تعداد محدودی از جمله‌های دنباله وجود دارد. x_k را بزرگترین این‌جمله‌ها، ازلحاظ قدر مطلق، می‌گیریم. C را بزرگترین، از عددهای $|a|$ ، $|b|$ و $|x_k|$ در نظرمی‌گیریم. در این صورت ، برای هر عضوی ازدنباله، نامساوی $|x_n| \leqslant C$ درست‌است. در واقع، اگر x_n برپاره خط $[a , b]$ قرارگرفته باشد ، $|x_n|$ نمی‌تواند بزرگتر از عددهای $|a|$ یا $|b|$ (هرکدام که بزرگترند) باشد . و اگر x_n برپاره خط $[a , b]$ واقع نباشد، در این صورت داریم: $|x_n| \leqslant |x_k|$ (زیرا x_k در بین جمله‌هائی از دنباله، که بر $[a , b]$ واقع نباشند، ازلحاظ قدر مطلق از همه بزرگتر بود). در نتیجه $|x_n| \leqslant C$.

ب) دنباله‌ای که در مسألهٔ ۲۲ـ b داده شده است، کرانه‌دار است، زیرا $|x_n| \leqslant ۲$. ثابت می‌کنیم که این دنباله‌دارای حد نیست. به سادگی معلوم می‌شود که پاره خطهای $\left[۰ , \frac{۱}{۴}\right]$ و $\left[۱ , ۱\frac{۱}{۴}\right]$ برای‌دنبالهٔ $\{x_n\}$ ظرف هستند. فاصلهٔ بین‌این پاره خطها، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

از اینجا نتیجه می‌شود (حل مسألهٔ ۲۴ـ الف) را ببینید)، که برای این دنباله، تله‌ای کوچکتر از $\frac{۳}{۴}$ وجود ندارد. ولی اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد بود، می‌بایستی بتوان تله‌ای که طول‌آن به دلخواه کوچك باشد، پیدا کرد. بنابراین حد وجود ندارد.

روشن است که می‌توان طرح حل این مساله را، بدون استفاده از اصطلاح‌های «تله» و «ظرف» ریخت (حل . مساله‌های ۳۰ـ ح) و ۳۰ـ ی) را با هم مقایسه کنید)، که آن را به عهدهٔ خودتان می گذاریم.

۳۶. الف) C را عددی دلخواه می گیریم. برای‌هر $n>C$، نامساوی $|x_n|>C$ برقراراست. بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت بی نهایت میل‌می کند.

ب) شبیه حالت الف) حل می‌شود.

ج) دنباله کرانه‌دار نیست، زیرا برای هرعدد مثبت C، اندیسی مثل n وجود دارد، به‌نحوی‌که $|x_n|>C$ باشد (کافی است عدد زوجی بزرگتراز C را انتخاب کنیم). ولی این دنباله به سمت بی‌نهایت میل نمی کند، زیرا نامساوی $|x_n|>۱$، برای هیچ کدام از جمله‌های ردیف فرد دنباله صادق نیست.

د) C راعدد دلخواهی می گیریم. برای‌هر $n>C^۲$، نامساوی $|x_n|>C$ برقرار است. درنتیجه به‌ازای $n\to\infty$ داریم $x_n\to\infty$.

ه) ثابت می کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ کرانه‌دار است. به‌طور دقیق‌تر، ثابت می کنیم $|x_n| \leqslant ۵$. چون $x_n>۰$، پس $|x_n|=x_n$، و ما باید ثابت کنیم که $x_n\leqslant ۵$. تساوی‌های زیر این مطلب را روشن می کند:

$$۵-x_n=۵-\frac{۱۰۰n}{۱۰۰+n^۲}=\frac{۵}{۱۰۰+n^۲}(۱۰۰+n^۲-۲۰n)=$$

$$=\frac{۵(۱۰-n)^۲}{۱۰۰+n^۲}\geqslant ۰$$

۳۷. تنها دونمونه را برای بحث انتخاب می کنیم.

۱) ثابت می کنیم که شرطهای ۱) در هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ صدق می کند.

درواقع باید ثابت کنیم که عدد مثبتی مثل ε، عدد k و اندیس $n>k$ پیدا می‌شود، به‌نحوی‌داشته‌باشیم: $|x_n-a|<\varepsilon$. به‌عنوان ε، عدد $|x_1-a|+1$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $k=0$ ، $n=1$. دراین صورت، شرط موردنظر برقرار است.

۶) ثابت می‌کنیم که شرطهای ۶) به‌معنای آنست که عدد a، حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیست. در واقع، گزارهٔ «a عبارتست‌ازحد دنبالهٔ $\{x_n\}$» به‌این‌معناست که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مثل k می‌توان پیدا کرد که برای هر $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد. نفی این حکم را می‌توان اینطور بیان کرد: «نه برای هر $\varepsilon>0$ ، عددی مثل k پیدا می‌شود که برای هر $n>k$ ، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد».

این‌عبارت رامی‌توان اینطور تنظیم کرد: «برای بعضی از مقادیر $\varepsilon>0$، عددی‌مثل k پیدانمی‌شود که به‌ازای‌هر $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد». و این عبارت را هم‌می‌توان به‌این صورت درآورد: «عدد $\varepsilon>0$ پیدا می‌شود که برای هر k ، و نه برای هر $n>k$ ، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار است». بالاخره این عبارت را می‌توان چنین بیان کرد: «عدد $\varepsilon>0$ پیدا می‌شود، که برای هر k ، می‌توان $n>k$ را پیدا کرد به‌نحوی که داشته باشیم: $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$» .

و به‌این‌ترتیب، درست به شرطهای ۶) می‌رسیم. به‌این نکته توجه کنید که این شرطها را می‌توان از تعریف حد ، به‌ترتیب زیر ، به دست آورد:

۱) به‌جای «پیدا می‌شود ... به‌نحوی که» ، جملهٔ «برای هر» را قرار دهید ؛

۲) به‌جای «برای هر»، جملهٔ «پیدا می‌شود ... به‌نحوی که» را قرار دهید ؛ نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ را به‌نامساوی متضاد آن $|x-a|\geqslant\varepsilon$ تبدیل کنید. این قاعده را می‌توان برای همهٔ شرطهای دیگرهم به‌کار برد. تحقیق کنید که برای هرشرط، نفی آن‌را می‌دهد.

۳۸. اگر علامت‌ها با $+$ آغاز شود، به‌معنای آنست که همهٔ جمله‌های دنباله برابر است با a. بنابراین، ترکیب بقیهٔ علامت‌ها معین می‌شود: a حد دنباله است و a نقطهٔ حدی آنست، دنباله کرانه‌دار است و به‌سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند.

حالا ترکیبی از علامت‌ها درنظر می‌گیریم که با «$+\ -$» آغاز شده باشد؛ و این به‌معنای آنست که دنباله به سمت a میل می‌کند. دراین صورت علامت‌های دیگر ترکیب معلوم است: a، نقطهٔ حدی دنباله است (مسألهٔ ۳۳): دنباله کرانه‌دار است (مسالهٔ ۳۵ـالف) و به‌سمت بی‌نهایت میل‌نمی کند.

همچنین ترکیبی را انتخاب می‌کنیم که به + ختم شده باشد. در این حالت، دنباله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و همین موضوع تکلیف سایر علامت‌ها را روشن می‌کند: به‌طور اتحادی با a برابر نیست، به سمت a میل نمی‌کند، a نقطهٔ حدی آن نیست و کرانه‌دار هم نیست.

بقیهٔ ترکیب‌ها دارای جمله اول و دوم و پنجم منفی هستند. در این حالت، برای جمله‌های سوم و چهارم هر علامتی را می‌توان قرارداد. مثال‌های مربوطه در بخش «پاسخ و راهنمائی» داده شده است.

۳۹. در بخش «پاسخ و راهنمائی»، نمونهٔ دنباله‌هائی داده شده است که حد دارند و در آنها یا بزرگترین جمله، یا کوچکترین جمله و یا هردوی آنها وجود دارد. این باقی می‌ماند که ثابت کنیم دنباله‌ای وجود ندارد که حد داشته باشد، ولی نه بزرگترین و نه کوچکترین جمله نداشته باشد.

فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$، دارای جملهٔ بزرگتر نباشد. ثابت می‌کنیم که در اینصورت می‌توان از دنبالهٔ $\{x_n\}$، یك زیردنبالهٔ صعودی جدا کرد. x_1، جملهٔ اول دنباله را درنظر می‌گیریم. چون x_1، بزرگترین جمله نیست، جمله‌ای مثل x_{n_1} وجود دارد که از آن بزرگتر باشد: $x_{n_1} > x_1$. این جملهٔ x_{n_1} نمی‌تواند از همهٔ جمله‌های بعداز خود در دنبالهٔ بزرگتر باشد (زیرا درغیر اینصورت، بزرگترین جمله از n_1 جملهٔ اول دنباله، بزرگترین جمله در تمام دنباله خواهد بود)، بنابراین اندیسی مثل $n_2 > n_1$ پیدا می‌شود به‌نحوی که داشته باشیم: $x_{n_2} > x_{n_1}$. به‌همین ترتیب، جملهٔ x_{n_2} هم نمی‌تواند ازهمهٔ جمله‌های بعداز خودش، بزرگتر باشد وغیره. یك زیر دنبالهٔ صعودی نامتناهی به‌دست می‌آید:

$$x_1 < x_{n_1} < x_{n_2} < \dots < x_{n_k} < \dots$$

همچنین، اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای کوچکترین جمله نباشد، می‌توان یك زیر دنبالهٔ نزولی نامتناهی از آن بیرون کشید:

$$x_1 > x_{m_1} > x_{m_2} > \dots > x_{m_k} > \dots$$

اختلاف x_{n_1} و x_{m_1} را ε می‌گیریم. دراینصورت برای هر $k > 1$ داریم:

$$x_{n_k} - x_{m_k} > x_{n_1} - x_{m_1} = \varepsilon$$

از اینجا نتیجه می‌شود (مسالهٔ ۳۰ــ ح) یا ۳۶ــ ب) را ببینید)، که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد نیست.

۴۰. اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ ویا زیر دنباله‌ای از آن، دارای بزرگترین جمله نباشند، همانطور که درحل مسالهٔ ۳۹ ثابت کردیم، می‌توان یك زیر دنبالهٔ صعودی نامتناهی از $\{x_n\}$ جدا کرد. بنابراین حالتی را در نظرمی‌گیریم که

درآن هرزیر دنباله دارای بزرگترین جمله باشد. x_{n_1} را بزرگترین جملهٔ دنباله؛ x_{n_2} را بزرگترین، دربین همهٔ جمله‌هائی که بعد از x_{n_1} قرارگرفته‌اند، x_{n_3} رابزرگترین، دربین همهٔ جمله‌های بعداز x_{n_2} وغیره فرض‌می‌کنیم. درستی نامساوی‌زیر روشن‌است:

$$x_{n_1} > x_{n_2} > \cdots > x_{n_k} > \cdots$$

به‌این ترتیب، دراین حالت هم می‌توان از دنبالهٔ $\{x_n\}$، زیردنباله‌ای یکنوا جداکرد.

۴۱. این دنباله را درنظرمی‌گیریم:

$$۱/۴\ ;\ ۱/۴۱\ ;\ ۱/۴۱۴\ ;\ ۱/۴۱۴۲\ ;\ \ldots$$

دراین دنباله، جملهٔ x_n عبارتست ازمقدارتقریبی (نقصانی) عدد $\sqrt{۲}$ بادقت‌تا $\frac{۱}{۱۰^n}$.

از تعریف دنبالهٔ $\{x_n\}$ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{۲}$$

(به ازای $n > \log\frac{۱}{\varepsilon}$، نامساوی $|x_n - \sqrt{۲}| < \varepsilon$ برقراراست). چون‌عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است و چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌تواند تنها یك حد داشته باشد، بنابراین هیچ عددگویائی، حد این دنباله نیست.

تبصره دراین اثبات از این مطلب استفاده‌کردیم‌که عددی حقیقی وجود دارد که مجذور آن برابر ۲ باشد و ضمناً می‌توان آن را به صورت یك کسر دهدهی نامتناهی نوشت. می‌توان استدلال را تغییر داد، به نحوی‌که در آن تنها عددهای حقیقی نقش‌داشته باشند. برای این منظور باید x_n را به عنوان بزرگترین عددی تعریف کردکه بتوان آن را به صورت‌کسر دهدهی با n رقم بعد از ممیز نوشت و مجذور آن از ۲ کوچکتر باشد. بعد ازآن باید ثابت‌کرد که اگر عدد x_n به سمت عددی مثل a میل‌کند، خواهیم داشت:

$$a^۲ = ۲$$

اندیشهٔ اصلی این اثبات چنین است:

عدد x_n دارای این خاصیت است‌که $x_n^۲$ از ۲ کوچکتر، ولی $\left(x_n + \frac{۱}{۱۰^n}\right)^۲$ از ۲ بزرگتر است. بنابراین به ازای اندیس‌های بزرگ n، عدد $x_n^۲$ به ۲ خیلی نزدیك می‌شود. یعنی $x_n^۲$ و $a^۲$ هم به یکدیگر نزدیك می‌شوند. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف $a^۲$ و ۲، به‌دلخواه کوچك می‌شود. ولی‌این‌اختلاف، مقدار ثابتی است و به n بستگی ندارد. بنابراین $a^۲ = ۲$. این باقی می‌ماندکه ثابت‌کنیم، عددگویای a وجود ندارد، به نحوی‌که مجذور آن‌برابر ۲ باشد. سعی‌کنید خودتان از روی طرحی‌که در اینجا برای اثبات‌داده

شد، اثبات دقیق حکم را پیداکنید.

۴۲. دنبالهٔ کرانه‌داری را درنظرمی گیریم. ازآن یك‌زیردنبالهٔ نامتناهی یکنوا جدا می کنیم (حل مسألهٔ ۴۰ را ببینید). این‌زیر دنباله کرانه‌دار و بنابر اصل بولتانو ــ وایرشتراس دارای حد است. ثابت می کنیم که این حد، عبارتست ازنقطهٔ حدی برای دنبالهٔ اصلی.

در واقع، هرپاره خط به مرکز این نقطه، یك تله برای زیر دنبالهٔ انتخابی است. بنابراین روی آن بی نهایت جمله از دنبالهٔ اصلی وجوددارد، یعنی این پاره خط، برای دنبالهٔ اصلی **یك** ظرف است. حالا دیگرحکم مورد نظر از قضیه ۳۲، نتیجه می‌شود.

۴۳. a) ثابت می کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$. باید تحقیق کنیم که به ازای هرعدد مثبت ε، عددی مثل k پیدا می‌شود که برای همهٔ مقادیر $n>k$ داشته‌باشیم: $|x_n+y_n-a-b|<\varepsilon$.

چون بنابرشرط داریم: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$، عددی مثل k_1 وجود دارد که برای $n>k_1$ داشته‌باشیم: $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. به‌همین‌ترتیب از $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$، نتیجه می گیریم که عددی مثل k_2 وجود داردکه برای $n>k_2$ داشته باشیم: $|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. فرض کنیم که k بزرگترین عدد از بین دوعدد k_1 و k_2 باشد. دراین صورت برای $n>k$ خواهیم داشت:

$$|x_n+y_n-a-b|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\varepsilon$$

b) اثبات شبیه حالت a) است.

c) ثابت می کنیم که: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$. برای این منظور از این اتحاد، استفاده می کنیم:

$$x_ny_n-ab=x_ny_n-bx_n+bx_n-ab=x_n(y_n-b)+b(x_n-a)$$

چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ دارای حد است، بنابراین کرانه‌دار است (مسالهٔ ۳۵ــ الف) را ببینید)، یعنی عددی مثل C پیدا می‌شودکه برای هر n داشته باشیم: $|x_n|\leqslant C$ عدد مثبتی مثل ε را درنظرمی گیریم. چون $\lim\limits_{n\to\infty} n=a$، عددی مثل k_1 وجود دارد به نحوی که برای $n>k_1$، نامساوی $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2|b|}$ برقرار باشد. به همین ترتیب، عددی هم مثل k_2 پیدا می‌شودکه برای $n>k_n$، نامساوی $|y_n-b|\cdot<\frac{\varepsilon}{2C}$ برقرار باشد.

بزرگترین عدد از بین k_1 و k_2 را k می‌نامیم. روشن است که برای $n>k$، خواهیم داشت:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n(y_n - b) + b(x_n - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} = \varepsilon$$

d) ابتدا فرض می‌کنیم $b \neq 0$ باشد. ثابت می‌کنیم که در این حالت حد $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ برابر $\frac{1}{b}$ است. برای مشخص بودن وضع فرض می‌کنیم: $b>0$.

چون $y_n \longrightarrow b$، عددی مثل k_1 پیدا می‌شود که برای $n>C_1$، نامساوی $|y_n - b| < \frac{b}{2}$ برقرار باشد. از آنجا

$$y_n - b > -\frac{b}{2} \quad \text{یا} \quad y_n > \frac{b}{2} \quad \text{و یا} \quad \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$$

عدد مثبت ε را در نظر می‌گیریم. عددی مثل k_2 وجود دارد که برای $n>k_2$، نامساوی $|y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{2}$ برقرار باشد. بزرگترین عدد از بین دوعدد k_1 و k_2 را، k می‌نامیم. دراین‌صورت برای $n>k$ به‌دست‌می‌آید.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{2}{b} \cdot \frac{\varepsilon b^2}{2} \cdot \frac{1}{b} = \varepsilon$$

ثابت کردیم که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. حالا ازحکم‌مسالهٔ ۳۵-c) استفاده‌می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{a}{b}$$

تبصره ممکن است بعضی از جمله‌های دنبالهٔ $\{y_n\}$ به‌سمت صفر میل‌کنند. در چنین‌صورتی، بیان $\frac{1}{y_n}$ معنا ندارد. با وجود این، چنین وضعی می‌تواند برای تعداد محدودی از جمله‌ها پیش آید. درواقع، از اندیسی به‌بعد، نامساوی $|y_n - b| < |b|$ برقرار است که از آنجا $y_n \neq 0$ می‌شود.

اکنون به‌حالت $b=0$ می‌پردازیم ممکن است پیش آید که تعداد **نامحدودی** از جمله‌های دنبالهٔ $\{y_n\}$ (ویا حتی همهٔ جمله‌های آن از ردیفی به‌بعد)، به‌سمت صفرمیل کنند. در چنین صورتی بیان $\frac{x_n}{y_n}$، معنای خود را از دست می‌دهد و ما نمی‌توانیم به‌بررسی دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ بپردازیم.

ثابت می‌کنیم که اگر $a\neq 0$ باشد، حتی در حالتی که که همهٔ y_n-
ها مخالف صفر باشند، دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ دارای حد نیست. درواقع، اگر c را
عددی دلخواه فرض کنیم، عددی مثل k_1 پیدا می‌شود که برای $n>k_1$
داشته باشیم: $|y_n|<\frac{|a|}{2(|c|+1)}$ (زیرا به‌ازای $n\to\infty$ داریم: $y_n\to 0$)؛
همچنین عددی مثل k_2 پیدا می‌شود که برای $n>k_2$ داشته‌باشیم:
$|x_n-a|<\frac{|a|}{2}$. k را بزرگترین عدد از دوعدد k_1 و k_2 می‌گیریم . در
این صورت، برای $n>k$ به‌دست می‌آید.

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|>\frac{|a|}{2}\cdot\frac{2(|c|+1)}{|a|}=|c|+1$$

به این ترتیب، عدد c ، حد دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ نیست.

بالاخره درحالت $a=b=0$ ، دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$، ممکن است دارای حد
باشد یا نباشد (مسألهٔ ۵۳ را ببینید).

۴۴. a) استدلال را با برهان خلف انجام می‌دهیم. اگر:
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ وجود داشته باشد، بنابرمسالهٔ (b–۴۳)، باید دنبالهٔ $\{y_n\}$
هم دارای حدی باشد ، زیرا داریم: $y_n=(x_n+y_n)-x_n$ ؛ درحالی که
بنابر شرط مساله $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ وجود ندارد. تناقضی که به‌دست می‌آید، به‌معنای
آن است که $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ وجود ندارد.

b) نمونه‌های

$$x_n=\frac{n-1}{n}\ ,\ y_n=(-1)^n\ ;\ x_n=\frac{1}{n}\ ,\ y_n=(-1)^n$$

نشان می‌دهند که به هردو حالت می‌توان برخورد کرد.

۴۵. هر دو حالت ممکن است . این مطلب از نمونه‌های زیر روشن
می‌شود:

۱) $x_n=(-1)^n\ ,\ y_n=(-1)^n$;

۲) $x_n=(-1)^n\ ,\ y_n=n$

۴۶. عدد مثبت ε را درنظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم که از ردیفی به

بعد، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار است. بنا بر فرض، $|y_n-a|<\varepsilon$ عددهای k_1 و k_2 وجود دارند که برای $n>k_1$ و $n>k_2$، به ترتیب نامساوی‌های $|y_n-a|<\varepsilon$ و $|z_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشند. k را بزرگترین عدد ازمیان دوعدد k_1 و k_2 می‌گیریم. در این صورت برای $n>k$، هر دو نامساوی بر قرار می‌شود. حالا به یاد می‌آوریم که بنابر شرط مسأله داریم: $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$. از نامساوی‌های $|y_n-a|<\varepsilon$، $|z_n-a|<\varepsilon$ و $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ نتیجه می‌شود که $|x_n-a|<\varepsilon$ (این حکم‌را خودتان درسه حالت جداگانه $a<y_n$، $y_n \leqslant a \leqslant z_n$ و $a>z_n$ ثابت کنید).

به‌این ترتیب، به‌ازای همهٔ مقادیر $n>k$، نامساوی $|x_n-a|<\varepsilon$ به دست می‌آید، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

۴۷. الف) بنابه رابطهٔ مجموع درتصاعد هندسی داریم.

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

که ازآنجا به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=2$$

ب) روشن است که دنبالهٔ

$$S_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}$$

دنباله‌ای صعودی است. ثابت می‌کنیم که کرانه‌دار است.

از نامساوی $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ نتیجه می‌گیریم:

$$S_n<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n(n-1)}=$$
$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$$

به‌این ترتیب به‌ازای همهٔ مقادیر n داریم: $S_n<2$ بنابراین، طبق‌اصل بولتانو ـ وایرشتراس، نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ وجود دارد.

بااستفاده از روش‌های ریاضیات عالی، می‌توان ثابت کردکه این حد برابر با $\frac{\pi^2}{6}$ است.

ج) S_{2n} صعودی است، زیرا

$$S_{2(n+1)}-S_{2n}=\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}>0$$

ضمناً S_{2n} کرانه‌دار است، زیرا

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)-\dots-\left(\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-3}\right)-\frac{1}{4n-1}<1$$

به‌این ترتیب $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ وجود دارد. این حدرا به a نشان می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که‌عدد a، حدنباله $\{S_n\}$ است. عددمثبت ε را درنظر می‌گیریم. در این صورت عددی مثل k پیدا می‌شود که برای $2n>k$ نامساوی $|S_{2n}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ برقرار باشد. علاوه برآن برای $2n+1>\frac{1}{\varepsilon}$، نامساوی

$$|S_{2n+1}-S_{2n+2}|=\frac{1}{4n+3}<\frac{\varepsilon}{2}$$

برقراراست. بنابراین، اگر n را بزرگترین عدد از بین دوعدد k و $\frac{1}{\varepsilon}$ بگیریم، خواهیم داشت: $|S_n-a|<\varepsilon$.

ثابت کنید که $a=\frac{\pi}{4}$.

۴۸. دنباله‌های $\{S_n\}$ و $\{S_{n-1}\}$ را درنظر می‌گیریم که درآن داریم:

$$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

اگر رشتهٔ $a_1+a_2+\dots+a_n\dots$ متقارب باشد، هردو دنباله دارای یك حد S خواهند بود. بنابراین (مسألهٔ ۴۳-b را ببینید):

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$$

یادآوری می‌کنیم که شرط $\lim_{n\to\infty} a_n=0$، برای متقارب بودن رشتهٔ $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ لازم است، ولی کافی نیست. مثلا اگرداشته‌باشیم $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$، داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ (مسالهٔ ۵۶ را ببینید). از طرف دیگر داریم:

$$S_n=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+\dots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=\sqrt{n}$$

و درنتیجه $S_n\to\infty$ و رشته متباعد است.

۴۹. چون دنبالهٔ a_n نزولی است، می‌توان این نامساوی‌ها را نوشت:

$$a_3\leqslant a_2\leqslant a_1$$

$$2a_4 \leqslant a_3+a_4 \leqslant 2a_2$$
$$4a_8 \leqslant a_5+a_6+a_7+a_8 \leqslant 4a_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2^n a_{2^{n+1}} \leqslant a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^{n+1}} \leqslant 2^n a_{2^n}$$
ازمجموع این نامساوی به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}(c_n-a_1) \leqslant S_{2^{n+1}}-a_1 \leqslant c_n$$

که درآن، S_n عبارتست ازمجموع n جملهٔ اول از رشتهٔ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

و c_n، مجموع n جملهٔ اول از رشتهٔ

$$a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^n a_{2^n}+\cdots$$

چون دنباله‌های $\{S_n\}$ و $\{c_n\}$ صعودی هستند، بنابر اصل بولتانو ـ وایرشتراس، برای آن که دارای‌حد باشند، کافی است ثابت کنیم که کرانه‌دار هستند. ولی ازنامساوی‌هایی که به‌دست آوردیم، نتیجه می‌شود که اگر یکی از این دو دنباله کرانه‌دار باشد، دیگری هم کرانه‌دار است. در واقع، اگر $|S_n| \leqslant M$ (برای همه‌مقادیر n)، دراین صورت داریم: $|c_n| \leqslant 2S_{2^{n+1}}-a \leqslant 2M$ واگر داشته باشیم $|c| \leqslant M$ (برای همهٔ مقادیر n)، درآن‌صورت داریم: $|S_n| \leqslant S_{2^{n+1}} \leqslant c_n+a_1 \leqslant M+a_1$

۵۰. ازنتیجهٔ مسالهٔ ۴۹ استفاده می‌کنیم و به‌جای رشتهٔ

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

رشتهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\cdots+\frac{2^n}{2^{np}}+\cdots$$

جمله‌های این رشته، یك تصاعد هندسی باقدر نسبت $q=\frac{1}{2^{p-1}}$ تشکیل می‌دهند، بنابر رابطهٔ مجموع درتصاعدهندسی داریم: $S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$. اگر $0<q<1$، دنبالهٔ $\{S_n\}$ به‌سمت $\frac{1}{1-q}$ میل می‌کند، واگر $q>1$، در آن صورت $S_n \to \infty$ (این حکم را خودتان ثابت کنید). بالاخره در حالت $q=1$، رابطهٔ مجموع، معنای خودرا ازدست می‌دهد: صورت و مخرج آن برابر صفر می‌شود. ولی دراین حالت، می‌توان مجموع را، بدون استفاده از

رابطه به‌دست‌آورد، زیرا به‌ازای $q = 1$، همهٔ جمله‌های دنباله برابر ۱ می‌شود وازآنجا $S_n = n$ و رشته متباعد است. حالا کافی است به‌یاد بیاوریم که:

$$q = \frac{1}{2^{p-1}}$$

جواب: رشته۲درحالت $p > 1$ متقارب ودرحالت $p \leqslant 1$ متباعداست.

۵۱. اشتباه درهمهٔ این حالت‌ها، مربوط به‌آن است‌که از رابطه‌های

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n ،$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} ، \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

درمواردی استفاده شده است‌که دنبالهٔ $\{x_n\}$ ویا $\{y_n\}$ دارای حدنیست. نماد $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ، بیان سادهٔ این‌مطلب است که: دنبالهٔ $\{x_n\}$ از لحاظ قدر مطلق به‌طور نامحدود صعودی است. به‌این ترتیب، با نشانهٔ ∞ نباید، مثل یك عدد معمولی برخورد کرد. مثلا هرگز نمی‌توان نوشت:

$$\infty - \infty = 0 \text{ ، یا } \frac{\infty}{\infty} = 1 \text{ ، یا } \infty \times 0 = 0$$

۵۲. الف) باید ثابت کنیم‌که برای هرعدد c، اندیسی مثل k می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی‌که برای $n > k$ ، نامساوی $|x_n + y_n| > c$ برقرارباشد ابتدا عددی مثل k_1 پیدا می کنیم‌که برای $n > k_1$ ، نامساوی:
$|x_n| > c + |a| + 1$ برقرار باشد ، و این ممکن است، زیرا می‌دانیم که $x_n \to \infty$ (به ازای $n \to \infty$). بعد عدد k_2 را پیدا می کنیم به نحوی که برای $n > k_2$، نامساوی $|y_n - a| < 1$ برقرار باشد. این هم ممکن است زیرا y_n به‌ای $n \to \infty$، به‌سمت a میل می کند. از بین دو عدد k_1 و k_2 ، عدد بزرگتر را k می‌نامیم. برای $n > k$ داریم:

$$|x_n + y_n| > |x_n| - |y_n| > c + |a| + 1 - (|a| + 1) = c$$

ب) عدد مثبت ε را درنظر می گیریم. عدد k_1 را پیدا می کنیم، به‌نحوی که‌برای $n > k_2$ ، نامساوی $|y_n - a| < 1$ برقرارباشد. بعد،عددk_2راطوری پیدامی کنیم که‌برای $n > k_2$ نامساوی $|x_n| > \frac{|a|H}{\varepsilon}$ برقرارباشد. بزرگترین k_1 و k_2 را k می‌نامیم. دراین صورت برای $n > k$ به‌دست می‌آید:

$$\left|\frac{y_n}{x_n}\right| = \frac{|y_n|}{|x_n|} < \frac{|a| + 1}{\frac{|a| + 1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

۵۴. با استفاده از قانون‌های ابتدای بند، می‌توان نوشت:

الف) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}=\frac{2}{3},$$

ب) $$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0,$$

ج) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1}{1\times 1}=1,$$

د) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

۵۵. به کمک استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که مجموع

$$1^k+2^k+\cdots+n^k$$

چند جمله‌ای از n با درجهٔ $k+1$ است، که جملهٔ بزرگتر آن عبارتست از $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$ به‌ازای $k=1$، عبارت مفروض برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود، که یک چندجمله‌ای نسبت به n و از درجهٔ $k+1=2$ است و ضریب جملهٔ بزرگتر آن برابر $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}$ می‌شود.

فرض می‌کنیم که حکم ما برای هرعدد درست $k<k_0$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که این حکم، برای k_0 هم برقرار است. این رابطه‌ها را که ناشی از فرمول دوجمله‌ای است، درنظر می‌گیریم:

$$(n+1)^{k_0+1}=n^{k_0+1}+(k_0+1)n^{k_0}+\cdots+1,$$
$$n^{k_0+1}=(n-1)^{k_0+1}+(k_0+1)(n-1)^{k_0}+\cdots+1,$$

$$(n-1)^{k_0+1}=(n-2)^{k_0+1}+(k_0+1)(n-2)^{k_0}+\cdots+1,$$

. . . .

$$2^{k_0}=1^{k_0+1}+(k_0+1)1^{k_0}+\cdots+1$$

اگر همهٔ این تساوی‌هارا باهم جمع کنیم و توجه کنیم همهٔ جمله‌های سمت‌چپ تساوی‌ها، به‌جز $(n+1)^{k_0+1}$، باجملهٔ نظیرش درسمت راست حذف‌می‌شود، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{k_0+1}=1+(k_0+1)[n^{k_0}+(n-1)^{k_0}+\cdots+1^{k_0}]+\cdots+n$$

طبق فرض استقراء ، همهٔ جمله‌هائی که با چند نقطه نشان داده شده است، یک‌چند جمله‌ای‌را تشکیل می‌دهند که درجه‌ای کوچکتر یا مساوی k_0 دارند. ازاینجا می‌توان نوشت:

$$1^{k_0}+2^{k_0}+\cdots+n^{k_0}=\frac{(n+1)^{k_0+1}}{k_0+1}+P(n)$$

که در آن $P(n)$، یک‌چند جمله‌ای نسبت به n است‌که درجهٔ آن از k_0 تجاوز نمی‌کند. اگر $(n+1)^{k_0+1}$ را بنا بر فرمول دو جمله‌ای باز کنیم، سر آخر خواهیم داشت:

$$1^{k_0}+2^{k_0}+\cdots+n^{k_0}=\frac{n^{k_0+1}}{k_0+1}+Q(n)$$

که در آن $Q(n)$، چند جمله‌ای است که درجهٔ آن بالاتر از k_0 نیست. حکم ثابت شد.

به‌عنوان مثال چندنمونه ازمجموع

$$S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$$

را برای بعضی ازمقادیر k می‌آوریم:

$$S_0(n)=n$$

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$S_3(n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

برای رابطهٔ‌کلی مجموع $S_k(n)$ ، باید قبلا با «عددهای برنولی» آشناشد.

حالا می‌توانیم حد موردنظر را به‌دست آوریم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{k+1}}{k+1}+a_1n^k+\cdots+a_{k+1}}{n^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\dots+\frac{a_{k+1}}{n^{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1}$$

۵۶. داریم:

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}}$$ بنابراین

$$|x_n|=\frac{2}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که برای $n>1+\frac{1}{\varepsilon^2}$ ، نامساوی $|x_n|<\varepsilon$ برقرار است.

۵۷. داریم:

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\dots>n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{2}$$

بنابراین

$$|x_n|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{\frac{n^2}{2}}=\frac{2}{n}$$

و درنتیجه به‌ازای $n>\frac{2}{\varepsilon}$ ، نامساوی $|x_n|<\varepsilon$ برقرار است.

۵۸. داریم:

$$a^n=[1+(a-1)]^n=$$
$$=1+n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\dots>$$
$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot(a-1)^2$$

بنابراین

$$|x_n|=\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2}=\frac{2}{(n-1)(a-1)^2}$$

برای هرعدد مثبت ε ، به‌ازای $n>1+\frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}$، خواهیم‌داشت:

$$|x_n|<\varepsilon$$

۵۹. اگر n عددی بین 2^{m-1} و 2^m باشد، مقدار $\log_2 n$، بین $m-1$ و m خواهد بود. بنابراین ، عبارت $\frac{\log_2 n}{n}$ از $\frac{m}{2^{m-1}}$ تجاوز نمی‌کند.

ولی می‌دانیم (مسالهٔ ۵۷ را ببینید) که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مثل k پیدا می‌شود به‌نحوی که برای $m>k$، نامساوی $\frac{m}{2^m}<\frac{\varepsilon}{2}$ یا $\frac{m}{2^{m-1}}<\varepsilon$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که برای $n>2^k$، نامساوی $\frac{\log_2 n}{n}<\varepsilon$ برقرار است. در واقع، اگر داشته باشیم: $n>2^k$، مقدار n بین 2^{m-1} و 2^m $(m>k)$ خواهد بود و ازآنجا: $\frac{\log_2 n}{n}<\frac{m}{2^{m-1}}<\varepsilon$

۶۰. ثابت می‌کنیم که برای هرعدد مثبت ε، عددی مثل k پیدامی‌شود به‌نحوی که برای $n>k$، نامساوی $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ برقرارباشد. چون $\sqrt[n]{n}>1$، پس $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$. ببینیم نامساوی $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ به‌ازای چه‌مقادیری از n برقرار نیست. به زبان دیگر، به ازای چه مقادیری از n، نامساوی $\sqrt[n]{n}-1\geqslant\varepsilon$، یا $\sqrt[n]{n}\geqslant 1+\varepsilon$ ویا $n>(1+\varepsilon)^n$ برقرار است. داریم:

$$(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2+\dots>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$$

بنابراین، از نامساوی $n\geqslant(1+\varepsilon)^n$ نتیجه می‌شود: $n>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$، و ازآنجا $n<1+\frac{2}{\delta^2}$. به‌این ترتیب، برای‌هر $n>1+\frac{2}{\varepsilon^2}$، نامساوی $\sqrt[n]{n}-1\geqslant\varepsilon$ برقرار نیست، یعنی نامساوی $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ برقرار است.

۶۱. الف) دوجملهٔ مجاور دنباله‌را باهم مقایسه‌می کنیم. ریشهٔ $n(n+1)$ ام a را b می‌نامیم. دراین صورت داریم:

$$x_n=n(\sqrt[n]{a}-1)=n(b^{n+1}-1)=n(b-1)(b^n+b^{n-1}+\dots+1)$$

$$x_{n+1}=(n+1)(\sqrt[n+1]{a}-1)=(n+1)(b^n-1)=$$
$$=(n+1)(b-1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\dots+1)$$

که ازآنجا خواهیم داشت:

$$x_n-x_{n+1}=(b-1)(nb^n-b^{n-1}-b^{n-2}+\dots+1)$$

درحالت $b>1$ هردو عامل مثبت، (زیرا دراین حالت داریم: $(b^n>b^{n-1}>b^{n-2}>\dots>1)$ و در حالت $b<1$ هر دو عامل منفی‌اند. درحالت $b=1$ هم، هردوعامل برابرصفرمی‌شود. درنتیجه برای همهٔ حالت‌ها

داریم: $x_n - x_{n+1} \geqslant 0$. از طرف دیگر، اگر داشته باشیم $a \geqslant 1$، خواهیم داشت $x_n \geqslant 0$، یعنی دنبالهٔ مفروض از طرف پایین کرانه‌دار است، و بنابر اصل بولتسانو–وایراشتراس، دارای حد خواهد بود.

وقتی $a < 1$ باشد، $a = \frac{1}{b}$ می گیریم، داریم:

$$x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{b}} - 1\right) = -\frac{1}{\sqrt[n]{b}} n(\sqrt[n]{b} - 1)$$

چون $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\right)$ و $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1)$ وجود دارد، $\lim_{n\to\infty} x_n$ هم وجود خواهد داشت.

متذکر می‌شویم که ضمناً ثابت کردیم:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{b} - 1)$$

ب) تساوی نخست، از این رابطه، نتیجه می‌شود:

$$f(ab) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{ab} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{ab} - \sqrt[n]{b})$$

$$+ \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) = l(a)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b} + l(b) = l(a) + l(b)$$

در اینجا ازتساوی $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b} = 1$ استفاده کرده‌ایم. خودتان آن را ثابت کنید.

تساوی دوم‌را، ابتدا برای عددهای طبیعی p، بعد برای عددهای‌درست p، بعد برای عددهای گویای p، و سر آخر برای عددهای گنگ p، ثابت می کنیم. برای عددهای طبیعی p، تساوی $l(a^p) = pl(a)$ را به‌کمک‌استقراء ریاضی و ازتساوی $l(ab) = l(a) + l(b)$، به‌دست می‌آید.

برای عددهای درست ومنفی p، تساوی مورد نظر به کمک رابطهٔ: $l(a^{-1}) = -l(a)$ که درحل قسمت الف) ثابت شد ــ به دست می‌آید. در حالت گویا بودن‌عدد $p = \frac{m}{n}$، تساوی $l(a^p) = pl(a)$، به‌این ترتیب‌ثابت می‌شود: $b = \sqrt[n]{a}$ می گیریم. در این صورت خواهیم داشت: $a = b^n$، $a^p = b^m$. ثابت کردیم که

$$l(b^m) = ml(b) \text{ ، } l(b^n) = nl(b)$$

از آنجا $l(b^{m})=\frac{m}{n}(b^{n})$. واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

حالا به حالتی می‌پردازیم که p عددی گنگ باشد. روشن است که برای $b>a$ داریم: $l(b)>l(a)$ (زیرا $n(\sqrt[n]{b}-۱)>n(\sqrt[n]{a}-۱)$). ببینیم درچه موردی‌تساوی $l(b)=l(a)$ برقرار است. اگر این تساوی‌بتواند برای $b\neq a$ ممکن باشد. بافرض $c=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید: $l(c)=l(b)-l(a)=۰$. چون $c\neq ۱$، برای هرعددx می‌توان عددهای درستی مثل m و n پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم: $c^m<x<c^n$ (مثلا، اگر $c>۱$، کافی است فرض کنیم: $m<\log_c x$ و $n>\log_c x$). از آنجا

$$۰=ml(c)\leqslant l(x)\leqslant nl(c)=۰$$

می بینیم که برای همهٔ مقادیر x داریم: $l(x)=۰$، بعد، درمسالهٔ ۶۲ ــ ب) نشان می‌دهیم که اینطور نیست. دراینجا فقط یادآوری می کنیم که رابطه $l(a^p)=pl(a)$ دراین حالت به‌روشنی درست است.

حالا به‌حالتی می پردازیم که تابع $l(x)$، متحد با صفر نباشد. دراین صورت، تساوی $l(a)=l(b)$، تنها برای $a=b$ می‌توان ممکن باشد. به‌ـ خصوص برای $a>۱$ باید داشته باشیم: $l(a)>l(۱)=۰$، فرض می کنیم که تساوی $l(a^p)=pl(a)$ برقرار نباشد؛ مثلا، برای مقداری از $a>۱$ داشته باشیم: $l(a^p)>pl(a)$ (حالت‌های دیگر، یا به‌این‌حالت منجرمی‌شوند و یا با روشنی مشابه این حالت قابل بررسی هستند). روی پاره خط $\left[p\,,\,\frac{l(a^p)}{l(a)}\right]$، عدد گویای $\frac{m}{n}$ را انتخاب می کنیم. خواهیم داشت:

$$p<\frac{m}{n}<\frac{l(a^p)}{l(a)}$$

که‌ازآنجا به‌دست می‌آید: $l(a^p)>\frac{m}{n}l(a)=l(a^{\frac{m}{n}})$. از طرف دیگر، چون $p<\frac{m}{n}$، بنابراین $a^p<a^{\frac{m}{n}}$ و درنتیجه $l(a^p)<l(a^{\frac{m}{n}})$. نتیجه‌ـ گیری‌های متناقض، به‌این معناست که فرض ما درست نیست. به این ترتیب، رابطهٔ $l(a^p)=pl(a)$، برای همهٔ حالت‌ها، ثابت شد.

۶۲. الف) از رابطه $l(a^p)=pl(a)$، که درمسالهٔ ۶۱ــب) به‌دست

آوردیم، استفاده می‌کنیم. داریم:

$$l(a)=l(10^{\lg a})=\lg a\cdot l(10)$$

از آنجا $\frac{l(a)}{\lg a}=l(10)$، وبنابراین، به a بستگی ندارد.

ب) از برهان خلف استفاده می‌کنیم وفرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$M=l(10)=0$$

در چنین صورتی باید تابع $l(a)$ متحد با صفر باشد. ولی به سادگی می‌توان نشان داد که برای $a<1$ داریم: $l(a)<0$. در واقع دنبالهٔ $x_n=n(\sqrt[n]{a}-1)$، نزولی است (حل مسالهٔ ۶۱ـالف) را ببینید). و $x_1=a-1$. از آنجا نتیجه می‌شود که $l(a)<a-1$ (به‌ازای همهٔ مقادیر a)؛ و درحالت خاص $a<1$ داریم: $l(a)<0$.

با استفاده از تساوی $l(a^{-1})=-l(a)$، می‌توان مقدار $l(a)$ را از پایین، محدود کرد:

$$l(a)=-l(a^{-1})>1-\frac{1}{a}$$

ج) فرض می‌کنیم $e=10^{\frac{1}{l(10)}}$، دراین صورت خواهیم داشت:

$lge=\frac{1}{l(10)}$ و $l(a)=l(10)\lg a=\frac{\lg a}{\lg e}=\log_e a$ چون $l(10)>0$

بنابراین $e>1$.

۶۴. الف) برای‌مشخص بودن وضع $a<b$ می‌گیریم. دراین صورت داریم:

$$\sqrt[p]{\frac{a^p+b^p}{2}}>\sqrt[p]{\frac{2b^p}{2}}=b$$

ازطرف دیگر داریم:

$$\sqrt[p]{\frac{a^p+b^p}{2}}>\sqrt[p]{\frac{2a^p}{2}}=a$$

یعنی $S_p(a,b)$، بین دوعدد a و b قرار دارد.

ب) مجذور عددهای $S_1(a,b)$ و $S_2(a,b)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$[S_1(a,b)]^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4},$$

$$[S_2(a,b)]^2=\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{2a^2+2b^2}{4}$$

ازآنجا

$$[S_2(a , b)]^2-[S_1(a , b)]^2=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqslant 0$$

چون $S_2(a , b)$ و $S_1(a , b)$ مثبت‌اند، بنا براین داریم:

$$S_2(a , b)\geqslant S_1(a , b)$$

نامساوی $S_{-2}(a , b)\leqslant S_{-1}(a , b)$ هم به‌همین‌ترتیب ثابت‌می‌شود.

حالا، این تفاضل را درنظر می گیریم:

$$S_1(a , b)-S_{-1}(a , b)=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geqslant 0$$

نامساوی‌هائی را که ثابت کردیم، حالت خاصی ازاین قضیهٔ کلی است:

$$p>q\Rightarrow S_p(a , b)\geqslant S_q(a , b)$$

که ضمناً حالت تساوی تنها به‌ازای $a=b$ ممکن است.

۶۴. الف) ابتدا فرض می کنیم: $a\geqslant b$. دراین صورت:

$$S_n(a , b)=\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}=a\sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2}}$$

چون داریم $\frac{b}{a}\leqslant 1$، خواهیم داشت: $1<1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\leqslant 2$ و ازآنجا

$$a\sqrt[n]{\frac{1}{2}}<S_n(a , b)\leqslant a$$

ولی $\lim_{n\to\infty} a\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=a$ بنا به «قضیهٔ‌دونگهبان» (مسالهٔ ۴۶ راببینید) بایدداشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(a , b)=a$$

به‌همین ترتیب، برای حالت $b>a$ ثابت می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(a , b)=b$$

به‌این ترتیب، در هر حالتی، مقدار حد برابر است با بزرگترین عدد از بین دوعدد a و b:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(a , b)=\mathrm{Max}(a , b)$$

ب) داریم:

$$S_{-1}(a , b)=\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{2}\right)^{-\frac{1}{n}}=[S_n(a^{-1} , b^{-1})]^{-1}$$

از آنجا:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, S_{-n}(a , b)=\frac{1}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, S_n(a^{-1} , b^{-1})}=$$

$$\frac{1}{\mathrm{Max}(a^{-1} , b^{-1})}=\mathrm{Min}(a , b)$$

(یعنی دراین حالت، مقدار حد برابر است با کوچکترین عدد از بین دو عدد a و b)

ج) ابتدا یادآوری می کنیم که $\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\geqslant\sqrt{a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}}$ ،

زیرا

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}-\sqrt{a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2n}}-b^{\frac{1}{2n}}\right)^2}{2}\geqslant 0$$

از آنجا

$$S_{\frac{1}{n}}(a , b)=\frac{\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n}{2}\geqslant\left(\sqrt{a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}}\right)^n=\sqrt{ab}$$

حالا ثابت می کنیم که وقتی $n\to\infty$، مقدار $S_{\frac{1}{n}}(a , b)$ به‌سمت $\sqrt{ab}$ میل می کند. برای‌این منظور، ازنامساوی $\ln a<a-1$ ، که درحل مسالهٔ ۶۲ـ ب) ثابت کردیم، استفاده می کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\ln S_{\frac{1}{n}}(a , b)=n\cdot\ln\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}<n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)]$$

درمجموع آخر، جملهٔ اول به‌طرف $\ln a$ و جملهٔ‌دوم به‌طرف $\ln b$ میل‌می کند.

بنابراین، برای هرعدد مثبت ε، اندیسی مثل k پیدا می‌شود، که برای $n>k$ ، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\ln S_{\frac{1}{n}}(a , b)<\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)+\varepsilon$$

و یا $\quad S_{\frac{1}{n}}(a , b) < e^{\varepsilon} \cdot \sqrt{ab}$

حالاعدد مثبت ε_1 را درنظرمی گیریم. فرض می کنیم: $\varepsilon = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{ab}}\right)$ ، و عدد k را به‌اندازهٔ کافی بزرگ،انتخاب‌می کنیم. برای $n > k$، خواهیم‌داشت:

$$S_{\frac{1}{n}}(a , b) < e^{\varepsilon} \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + \varepsilon_1$$

ثابت کردیم که

$$\lim_{n \to \infty} S_{\frac{1}{n}}(a , b) = \sqrt{ab}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که طبیعی است که به‌جای واسطهٔ مرتبهٔ صفر ، یعنی $S_0(a , b)$ ، همان واسطهٔ هندسی دوعدد a و b را بگیریم.

یادآوری می کنیم که‌واسطهٔ مرتبهٔ p وواسطهٔ مرتبهٔ $-p$ ، به‌وسیلهٔ رابطهٔ‌ساده‌ای به‌هم مربوطاند:

$$S_p(a , b) \cdot S_{-p}(a , b) = a \cdot b$$

(این تساوی را خودتان ثابت کنید).

اگر $S_0(a , b) = \sqrt{ab}$ بگیریم، این‌رابطه به‌ازای $p = 0$ هم‌درست است.

۶۵. a_n را تعداد حالت‌هایی می گیریم که درآن‌ها، حتی یکی ازنامه‌ها در پاکت خود قرار نگرفته باشند. ببینیم چند حالت وجود داردکه در مورد آن‌ها،درست k نامه در پاکت‌های خودشان‌قرار گیرند. روشن‌است‌که k نامه‌از n نامه‌را به C_n^k طریق، می‌توان انتخاب کرد. k نامهٔ‌انتخابی‌را درپاکت‌های خودشان قرارمی‌دهیم، وبقیهٔ $n-k$ نامه‌را، به‌نحوی می گذاریم‌که هیچ‌کدام از آن‌ها درپاکت خودشان نباشند. این‌کار را به a_{n-k} طریق می توان انجام داد. به‌این ترتیب، تعداد همهٔ حالت‌هائی‌که درمورد آن‌ها، درست k نامه در پاکت‌های خودشان قرار گرفته‌اند، برابر است‌با $C_n^k \cdot a_{n-k}$. یادآوری می کنیم‌که برای $k = n$، استدلال ما نیروی خودرا ازدست می‌دهد، زیرا دراین حالت a_n معین نیست.

برای اینکه این عبارت درحالت $k = n$ هم‌معنا داشته باشد، بایدفرض کرد: $a_0 = 1$. ازطرف دیگر، کل تعداد حالت‌ها برابر است با $n!$. به این تساوی می‌رسیم:

$$a_n + na_{n-1} + C_n^2 a_{n-2} + \cdots + na_1 + a_0 = n!$$

دوطرف تساوی‌را بر $n!$ تقسیم می کنیم و $\frac{a_n}{n!}$ را p_n می نامیم. به‌دست‌می‌آید:

$$p_n+p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{3!}p_{n-3}+\cdots+\frac{1}{n!}p_0=1$$

این رابطه امکان می‌دهد که بتوانیم عددهای p_1 ، p_2 ، ... ، p_n را پشت‌سر هم، پیدا کنیم.

در واقع ، چون داریم: $a_0=1$، خواهیم داشت : $p_0=1$. به ازای $n=1$، رابطهٔ ما به‌صورت $p_1+p_0=1$ درمی‌آید که ازآن‌جا $p_1=0$. (این تساوی‌را مستقیماً هم می‌توان به‌دست آورد. درنظر بگیرید که a_1 عبارت است از تعدادروش‌هائی که می‌توان یک‌نامه را دریک‌پاکت قرارداد، به‌نحوی که درپاکت مربوط به‌خودش قرار بگیرد.)

به‌ازای $n=2$ به‌دست می‌آید :

$$p_2+p_1+\frac{1}{2}p_0=1 \Rightarrow p_2=\frac{1}{2}$$

به‌ازای $n=3$:

$$p_3+p_2+\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{3!}p_0=1 \Rightarrow p_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}$$

به‌ازای $n=4$:

$$p_4+p_3+\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{3!}p_1+\frac{1}{4!}p_0=1$$

وازآنجا

$$p_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

وغیره .

این محاسبه، به‌طور طبیعی، مارا به‌اینجا می‌رساند که برای p_n داشته باشیم:

$$p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}$$

خودتان این رابطه‌را، بااستفاده ازروش استقراء ریاضی، ثابت کنید.

این باقی می‌ماند که ثابت کنیم، دنبالهٔ $\{p_n\}$ دارای حد است. و این اثبات را می‌توان دقیقاً مثل‌حل مسالهٔ ۴۷ـ ج) انجام داد.

حد p_n را به p نشان می‌دهیم. حال می‌توانیم این احتمال حدی را که در آن درست k نامه در پاکت‌های خودشان قرار گیرند، پیدا کنیم. در واقع ، کمی بالاتر دیدیم که تعداد این روش‌ها برابر است با $C_n^k \cdot a_{n-k}$.

نسبت این عدد به $n!$، برابر است با $\frac{a_{n-k}}{(n-k)!k!}$. و وقتی که $n\to\infty$، حد این نسبت چنین می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!k!} = \frac{۱}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{p}{k!}$$

اگر همهٔ احتمال‌های پیدا شده‌را باهم جمع کنیم، در مجموع باید به واحد برسیم. ازآنجا

$$p + \frac{p}{۱!} + \frac{p}{۲!} + \dots + \frac{p}{n!} = ۱$$

و یا

$$p\left(۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \dots + \frac{۱}{n!}\right) = ۱$$

درمسالهٔ ۶۲ گفتیم که مجموع رشته‌ای که در داخل پرانتز قرار دارد، برابر است باعدد e.

به این ترتیب، وقتی که $n \to \infty$ ، احتمال اینکه درست k نامه در پاکت‌های خودشان قرار گیرند، برابر است با $\frac{۱}{k!e}$.

۶۶. حلزون بعد از گام نخست، در نقطه‌ای به‌مختصات $(a+۱ \text{ ، } b)$ قرار می‌گیرد. (شکل ۱۴ را ببینید) ، بعد از گام دوم، در نقطهٔ به مختصات $(a+۱ \text{ ، } b+۱)$ و غیره. او ، بعداز آن که $۲n$ گام بردارد ، به نقطهٔ $(a+n \text{ ، } b+n)$ و بعداز گام $(۲n+۱)$ام، به‌نقطهٔ $(a+n+۱ \text{ ، } b+n)$ می‌رسد. به‌این ترتیب:

$$k_{۲n} = \frac{b+n}{a+n} \; ; \; k_{۲n+۱} = \frac{b+n}{a+n+۱}$$

این می‌ماندکه حد دنبالهٔ k_n را پیدا کنیم. $k_{۲n}$ را به k'_n و $k_{۲n+۱}$ را به k''_n نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد (حل مسالهٔ ۵۴ را ببینید) که دنباله‌های $\{k'_n\}$ و $\{k''_n\}$ به سمت واحد میل می‌کنند. بنابراین، برای هر n، عددی مثل $l_۱$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که برای $n > l_۱$ ، نامساوی $|k'_n - ۱| < \varepsilon$ برقرار باشد. به همین ترتیب، عددی مثل $l_۲$ وجود دارد که برای $n > l_۲$، نامساوی $|k''_n - ۱| < \varepsilon$ برقرار باشد . بزرگترین عدد از بین‌دوعدد $۲l_۱$ و $۲l_۲ + ۱$ را، l می‌نامیم. بنابراین، برای $n > l$ ، نامساوی $|k_n - ۱| < \varepsilon$ برقرار است.

۶۷. همان نشانه‌های مسالهٔ قبل‌را نگه می‌داریم.

a) دراین حالت داریم:

$$k'_n = k_{۲n} = \frac{b+۲n}{a+n} \; ; \; k''_n = k_{۲n+۱} = \frac{b+۲n}{a+n+۱}$$

به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} k'_n = \lim_{n\to\infty} k''_n = 2$$

ازآنجا، ومثل بالا، نتیجه می‌شود که $\lim_{n\to\infty} k_n$ وجوددارد وبرابراست با ۲.

b) دراین حالت داریم:

$$k'_n = k_{2n} = \frac{b+2+4+\dots+2n}{a+1+3+\dots+(2n-1)} = \frac{b+n^2+n}{a+n^2};$$

$$k''_n = k_{2n+1} = \frac{b+2+4+\dots+2n}{a+1+3+\dots+(2n+1)} = \frac{b+n^2+n}{a+n^2+2n+1}$$

از آنجا

$$\lim_{n\to\infty} k'_n = \lim_{n\to\infty} k''_n = 1$$

ومثل قبل، ثابت می‌شود که $\lim_{n\to\infty} k_n$ وجود دارد وبرابر است با ۱.

ج) دراین حالت

$$k'_n = k_{2n} = \frac{b+2+8+\dots+2^{2n-1}}{a+1+4+\dots+2^{2n-2}} = \frac{b+2\times\frac{4^n-1}{4-1}}{a+\frac{4^n-1}{4-1}};$$

$$k''_n = k_{2n+1} = \frac{b+2+8+\dots+2^{2n-1}}{a+1+4+\dots+2^{2n}} = \frac{b+2\times\frac{4^n-1}{4-1}}{a+\frac{4^{n+1}-1}{4-1}}$$

ازآنجا روشن است که

$$\lim_{n\to\infty} k'_n = 2 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} k''_n = \frac{1}{2}$$

ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ $\{k_n\}$ در این حالت، حدی ندارد. در واقع، اگر دنباله‌ای دارای حدی برابر a باشد، هردنباله‌ای از آن هم دارای همان حد خواهد بود. خودتان این حکم‌را، مثلا بااستفاده از مساله‌های ۲۷ـالف) و ۲۷ـب)، ثابت کنید. ولی در حالت مورد نظر ما، دنباله‌های $\{k_{2n}\}$ و $\{k_{2n+1}\}$، حدهای متفاوتی دارند.

۶۸. از تشابه مثلث‌های $A_nM_nP_n$ و $A_0M_nP_0$ (شکل ۲۴)، به‌دست می‌آید:

$$M_nP_0 : M_nP_n = P_0A_0 : P_nA_n$$

طول نقطهٔ M_n را x_n می‌گیریم. در این صورت، تناسبی را که به‌دست‌آوردیم، می‌توان‌چنین‌نوشت:

$$(a-x_n):\left(a+\frac{1}{n}-x_n\right)=a^2 : \left(a+\frac{1}{n}\right)^2$$

که ازآن‌جا. مقدار x_n به‌دست می‌آید:

شکل ۲۴

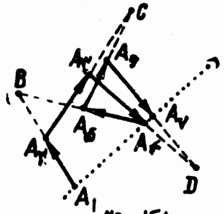
$$x_n=\frac{a(an+1)}{2an+1}=\frac{a\left(a+\frac{1}{n}\right)}{2a+\frac{1}{n}}$$

و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{\lim_{n\to\infty} a\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2a+\frac{1}{n}\right)}=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$$

این جواب را از نظر هندسی، می‌توان به این ترتیب، تنظیم کرد: هر مماسی که بریك نقطهٔ سهمی رسم‌شود: پاره خطی‌راکه راس سهمی را به‌تصویر نقطهٔ تماس برمحور ox وصل می‌کند، نصف خواهد کرد.

۶۹. فرض کنید توکا ازنقطهٔ A_1 خارج شده‌باشد. B ، C و D را به ترتیب محل مدرسه، سینما وقصریخ می‌گیریم (شکل ۲۵).



شکل ۲۵

توکا ــ خط شکستهٔ $A_1A_2A_3$ ... را طی می‌کند، که درآن نقطهٔ A_2 وسط پاره‌خط A_1B ، نقطهٔ A_3 وسط پاره‌خط A_2C ، نقطهٔ A_4 وسط پاره‌خط A_3D است و غیره. ثابت می‌کنیم که نقطه‌های A_1 ، A_4 ، A_7 ، ... ، A_{3n+1} ، ... ، روی یك خط راست قرار دارند. پاره‌خط A_2A_5، وسط دوضلع ازمثلث A_1BA_4 رابه‌هم وصل کرده است وبنابراین با A_1A_4 موازی و مساوی بانصف آن است. به همین ترتیب ، با در نظرگرفتن مثلث A_2CA_5 ، معلوم می‌شود که پاره خط A_3A_6 موازی‌با A_2A_5 ومساوی‌بانصف‌آن‌است. بالاخره، ازمثلث A_3DA_6 معلوم می‌شودکه پاره‌خط A_4A_7 موازی A_3A_6 ومساوی بانصف آن است. اگراین نتیجه‌هارا باهم مقایسه‌کنیم. می‌بینیم که پاره‌خط‌های A_1A_4 و A_4A_7 در امتداد یکدیگر قرار می‌گیرند وضمناً طول A_4A_7 برابر با $\frac{1}{8}$ طول A_1A_4 است.

به همین ترتیب ، می‌توان ثابت کرد که پاره خط A_7A_{10} در امتداد A_4A_7 ، پاره‌خط $A_{10}A_{13}$ درامتدادپاره‌خط A_7A_{10} وغیره، قرارمی‌گیرد.

به این ترتیب، نقطه‌های A_1 ، A_4 ، A_7 ، ... ، A_{3n+1} ، بر یک امتدادند. همچنین ثابت کردیم که فاصلهٔ بین این نقطه‌ها، یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{8}$ تشکیل می‌دهند. حالا دیگر به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که دنبالهٔ

$$A_1 , A_4 , A_7 , \ldots , A_{3n+1} , \ldots$$

دارای حدی است. نقطهٔ A_1 را روی خطی که از نقطه‌های دنبالهٔ ما می گذرد، به‌عنوان مبدأ و طول پاره‌خط A_1A_4 را به‌عنوان واحد انتخاب می کنیم. در این صورت، مختص نقطهٔ A_{3n+1} ، چنین می‌شود:

$$x_n = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{8^{n-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}$$

و بنا بر این داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{8}{7}$

به‌این ترتیب ثابت کردیم که دنبالهٔ نقطه‌های A_1 ، A_4 ، A_7 ، ... ، A_{3n+1} ، ... ، به‌طرف نقطه‌ای مثل M میل می کند. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که دنبالهٔ

$$A_2 , A_5 , A_8 , \ldots , A_{3n+2} , \ldots$$

به‌سمت نقطه‌ای مثل N ، و دنبالهٔ

$$A_3 , A_6 , A_9 , \ldots , A_{3n} , \ldots$$

به‌سمت نقطه‌ای مثل P ، میل می کند. بنا بر این مسیر توکا، به‌سرعت به‌حرکت در روی محیط مثلث MNP نزدیک می‌شود. خودتان ثابت کنید که جای نقطه‌های M ، N و P تنها به‌جای نقطه‌های B ، C و D بستگی دارد و به نقطهٔ A_1، مبداء حرکت، مربوط نیست.

۷۵ . روش اول. محوری را درنظر می گیریم از M_1 و M_2 بگذرد. مبداء مختصات را روی این محور، نقطهٔ M_1 و واحد را، پاره‌خط M_1M_2 به حساب می‌آوریم. در این صورت مختص x_n از نقطهٔ M_n ، با رابطهٔ زیر به مختصات دو نقطهٔ قبل از آن، مربوط می‌شود:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

(این رابطه را خودتان ثابت کنید). ثابت می کنیم که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌سمت $\frac{2}{3}$ میل می کند.

برای این منظور، باروش استقراء ریاضی، ثابت می کنیم که

$$x_n = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

به‌ازای $n = 1$ داریم:

$$x_1 = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

و به‌ازای $n = 2$:

$$x_2 = \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 1$$

حالا فرض می‌کنیم که رابطهٔ مربوط به x_n برای همهٔ مقادیر $n \leqslant k$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که دراین صورت برای $n = k + 1$ هم برقرار است. اگر مقادیر x_k و x_{k-1} را در رابطهٔ

$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x_{k+1} = \frac{\frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] + \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right]}{2} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k (1 - 2)\right] = \frac{2}{3} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\Big]$$

روش دوم. نقطهٔ M را درنظر می‌گیریم که پاره خط M_1M_2 را به نسبت $2:1$ تقسیم کند. ثابت کنید که همین‌نقطهٔ M ، همهٔ پاره‌خط‌های M_2M_3 ، M_3M_4 ، . . . ، M_nM_{n+1} را به‌همان‌نسبت $2:1$ تقسیم می‌کند. از این‌جا بلافاصله نتیجه می‌شود که طول پاره‌خط M_nM به‌اندازهٔ 2^{n-1} مرتبه، از طول پاره‌خط M_1M کوچکتر است. از اینجا معلوم می‌شود که دنبالهٔ نقطه‌های

$$M_1 , M_2 , \ldots , M_n , \ldots$$

به‌سمت نقطهٔ M میل می‌کند.

۷۱. الف) بنابر رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی، داریم:

$$S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

اگر $|a| < 1$ باشد خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1-\lim_{n\to\infty} a^n}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

درحالت $|a|>1$. به‌ازای $n\to\infty$ داریم $S_n\to\infty$. بالاخره در حالت $|a|=1$ یا به‌دنبالهٔ $S_n=n$ (به‌ازای $a=1$) می‌رسیم و یا به $S_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. هیچ‌کدام ازاین دوزنباله، حدی ندارند وبنابراین در حالت $|a|\geqslant 1$ ، این رشته متباعد است.

ب) S_n را به‌این‌صورت می‌نویسم:

$$S_n=(a+a^2+\cdots+a^n)+(a^2+a^3+\cdots+a^n)+\cdots+(a^{n-1}+a^n)+a^n$$

با استفاده از رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی، برای هر کدام از پرانتزها، به‌دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a-a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^2-a^{n+1}}{1-a}+\cdots+\frac{a^n-a^{n+1}}{1-a}=$$

$$=\frac{a+a^2+\cdots+a^n-na^{n+1}}{1-a}=$$

$$=\frac{\frac{a-a^{n+1}}{1-a}-na^{n+1}}{1-a}=\frac{a-(n+1-na)a^{n+1}}{(1-a)^2}$$

از این رابطه به‌سادگی نتیجه می‌شود (مسالهٔ ۵۸ را ببینید)، که برای $|a|<1$ داریم: $S_n\to\frac{a}{(1-a)^2}$ ، و برای $|a|\geqslant 1$ ، رشتهٔ مفروض متباعد است.

ج) با توجه به‌تساوی $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ داریم:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

د) با توجه به‌تساوی

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ ، داریم:

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{3\times 4}\right)+\left(\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{4\times 5}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$

$$\text{حد}_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$$

ه) ثابت می‌کنیم که

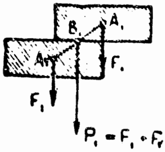
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

درواقع، دراین مجموع، n جمله داریم که کوچکترین آن‌ها برابر با $\frac{1}{2n}$ است. حال می‌توان نوشت:

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{n}{2}$$

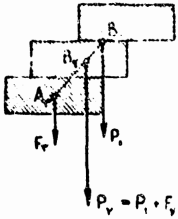
(زیرا هریك از پرانتزها، از $\frac{1}{2}$ بزرگتر است). از این‌جا معلوم می‌شود که برای $n\to\infty$ داریم: $S_n\to\infty$. یعنی رشتهٔ مفروض متباعد است.

۷۲. دوآجر را می‌توان روی یکدیگر باانحراف $\frac{1}{2}$ قرار داد (طول آجر را واحد گرفته‌ایم). P_1 ، منتجهٔ نیروهای F_1 و F_2 ، از فاصلهٔ $\frac{1}{4}$ مرز آجردوم می‌گذرد (شکل ۲۶). بنابراین، آجر سوم رامی‌توان نسبت به‌دومی به‌اندازهٔ $\frac{1}{4}$ جلو برد. حالا باید منتجهٔ دونیروی P_1 و F_3 را پیداکرد. چون نیروی P_1 ، دو برابر نیروی F_3 است، نقطهٔ اثر منتجه، پاره‌خط بین نقطه‌های اثر نیروهای F_3 و P_1 را به‌نسبت ۱: ۲ تقسیم می‌کند (شکل۲۷). از این‌جا نتیجه می‌شودکه آجر چهارم‌را می‌توان به‌اندازهٔ $\frac{1}{8}$ نسبت به‌آجر سوم، جلو برد. استدلال‌را می‌توان به‌همین ترتیب ادامه داد (خودتان بااستفاده از روش



$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4}$

شکل ۲۶



$\frac{B_1B_2}{A_2B_2} = \frac{F_2}{P_1} = \frac{1}{2}$

شکل ۲۷

استقراء ریاضی ثابت کنید که آجر $(n+1)$ام را می‌توان نسبت به آجر nام به‌اندازه $\frac{1}{2n}$ جلو برد).

بنابراین، از n آجر می‌توان مجموعه‌ای ساخت به‌طول

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}$$

وچون رشتهٔ $\cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$ متباعد است(مسالهٔ ۷۱ — ه رابببینید)، بنابراین، ساختمان مفروض را می‌توان تاهرجا ادامه‌داد.

۷۳. روشن است که دنبالهٔ $\{x_n\}$ دررابطهٔ $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ صدق می‌کند. فرض‌کنیم که حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ برابر a باشد. در این صورت، سمت چپ تساوی، به‌سمت a، و سمت راست آن به‌سمت $2 + \frac{1}{a}$ میل می‌کند. از آنجا $a = 1 \pm \sqrt{2}$. چون همهٔ x_nها از ۲ بزرگترند، عدد $1-\sqrt{2}$، نمی‌تواند حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد.

به‌این‌ترتیب، ثابت‌کردیم که $\{x_n\}$دارای حداست و این‌حد برابراست با $1+\sqrt{2}$.

حالا ثابت می‌کنیم که حد موردنظر، واقعاً وجود دارد. تفاضل x_n و $1+\sqrt{2}$ را به y_n نشان می‌دهیم. باید ثابت‌کنیم که: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. درتساوی $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$، مقدار x_n را برحسب y_n قرار می‌دهیم، به‌دست‌می‌آید:

$$1+\sqrt{2}+y_{n+1} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}+y_n}$$

ازآن‌جا

$$y_{n+1}=\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}+y_n)+1}{1+\sqrt{2}+y_n}=\frac{(1-\sqrt{2})\,y_n}{1+\sqrt{2}+y_n}$$

از این رابطه، تخمین زیر به‌دست می‌آید. $|y_{n+1}|<\frac{1}{4}|y_n|$

در واقع $|1-\sqrt{2}|<\frac{1}{2}$ و $1+\sqrt{2}+y_n=x_n>2$. بنابراین

$$|y_{n+1}|=\frac{|1-\sqrt{2}|\cdot|y_n|}{1+\sqrt{2}+y_n}<\frac{1}{4}|y_n|$$

و از این جا بلافاصله به دست می‌آید:

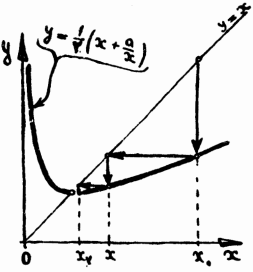
$$|y_n|<\frac{|y_1|}{4^{n-1}}<\frac{1}{2^{2n-1}}$$

به این ترتیب، دنبالهٔ $\{y_n\}$ به سمت صفر میل می‌کند.

تبصره. می‌توان ثابت کرد که دنبالهٔ

$$n_1 ،\ n_1+\frac{1}{n_2};\ n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3}};\ n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\frac{1}{n_4}}};\ \dots$$

که درآن n_1 ، n_2 ، n_3 ، ... ، عددهای طبیعی دلخواه هستند، همیشه دارای حدی‌است، و این حد عددی‌گنگ است. اگر دنبالهٔ عددهای n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . ، متناوب باشند، این‌حد به‌صورت $r_1+\sqrt{r_2}$ است که درآن r_1 و r_2 ، عددهایی گویا هستند. عکس این مطلب‌هم درست است، یعنی هرعدد گنگ به‌صورت $r_1+\sqrt{r_2}$ را می‌توان به‌صورت کسر مسلسل متناوب نوشت.



شکل ۲۸

۷۴. الف) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر حد $\{x_n\}$ وجود داشته‌باشد، این‌حدبرابر است با $\pm\sqrt{a}$ فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$. دراین صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$$

از این جا تساوی $b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$ به دست می‌آید که منجر به $b^2=a$ یعنی $b=\pm\sqrt{a}$ می‌شود.

اگر $x_0>0$ باشد، همهٔ جمله‌های دنباله مثبت، و اگر $x_0<0$ باشد، همهٔ جمله‌های دنباله‌منفی‌می‌شود. بنا براین،درحالت اول $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$ و در

حالت دوم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\sqrt{a}$.

این ماند که ثابت کنیم، دنبالهٔ $\{x_n\}$ در واقع، دارای حد است. برای مشخص بودن وضع، $x_0 > 0$ می‌گیریم (شکل ۲۸) . خارج قسمت تفاضل x_n و $\sqrt{a}$ را بر $\sqrt{a}$ به y_n نشان می‌دهیم. اگر مقدار $x_n = (1+y_n)\sqrt{a}$ را در تساوی $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$(1+y_{n+1})\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left[(1+y_n)\sqrt{a} + \frac{a}{(1+y_n)\sqrt{a}}\right]$$

و از آنجا

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1+y_n)}$$

باید ثابت کنیم که دنبالهٔ $\{y_n\}$ به سمت صفر میل می‌کند. ابتدا یادآوری می‌کنیم که چون داریم:

$$1+y_0 = 1 + \frac{x_0 - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x_0}{\sqrt{a}} > 0$$

بنابراین، همهٔ جمله‌های y_n برای $n > 1$ ، مثبت‌اند. به این ترتیب

$$|y_{n+1}| = y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1+y_n)} < \frac{y_n}{2}$$

از این جا نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

ب) مثال مشخصی می‌آوریم : $a = 10$ ، $x_0 = 3$. در این حالت

$$y_0 = \frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

چون $10 < 10/24 = {}^2(3/2)$ ، پس $\sqrt{10} < 3/2$ ، به این ترتیب

$$|y_0| = \frac{|3-\sqrt{10}|}{\sqrt{10}} < \frac{0/2}{3} = \frac{1}{15}$$

یعنی

$$|y_1| = \frac{y_0^2}{2(1+y_0)} < \frac{\left(\frac{1}{15}\right)^2}{2\left(1-\frac{1}{15}\right)} = \frac{1}{420} < \frac{1}{400}$$

و سپس

$$|y_2| = \frac{y_1^2}{2(1+y_1)} < \frac{\left(\frac{1}{400}\right)^2}{2} = \frac{1}{320000}$$

بنا بر این

$$|x_۲-\sqrt{۱۰}|=y_۲\sqrt{۱۰}<\frac{\sqrt{۱۰}}{۳۲۰۰۰۰}<۰/۰۰۰۰۱$$

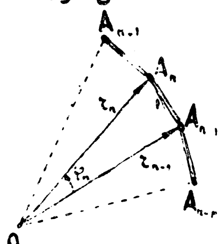
به این ترتیب برای پیدا کردن $\sqrt{۱۰}$ تا ۰/۰۰۰۰۱ تقریب، کافی است جملهٔ $x_۲$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$x_۱=\frac{۱}{۲}\left(x_۰+\frac{۱۰}{x_۰}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۳+\frac{۱۰}{۳}\right)=۳\frac{۱}{۶}=۳/۱۶۶۶۶\ldots;$$

$$x_۲=\frac{۱}{۲}\left(x_۱+\frac{۱۰}{x_۱}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۳\frac{۱}{۶}+\frac{۱۰}{۳\frac{۱}{۶}}\right)=۳\frac{۳۷}{۲۲۸}=۳/۱۶۲۲۸۰\ldots$$

مقدار واقعی $\sqrt{۱۰}$ چنین است: $\sqrt{۱۰}=۳/۱۶۲۲۷۷۶۵\ldots$.

همان طور که دیده می‌شود، مقدار به دست‌آمده با روش ما ، از مقدار واقعی $\sqrt{۱۰}$ ، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ اختلاف دارد.



شکل ۲۹

۷۵. الف) طول چوب کبریت را واحد می گیریم و فاصلهٔ نقطهٔ اولیه را تا انتهای کبریت nام به r_n نشان می‌دهیم (شکل ۲۹) . از مثلث OA_nA_{n-1} به دست می آید:

$$r_n^۲=r_{n-1}^۲+۱$$

چون $r_۱=۱$ ، بنا بر این ازاین رابطه نتیجه می‌شود:

$$r_n^۲=n\Rightarrow r_n=\sqrt{n}$$

ببینیم چوب کبریت nام تحت چه زاویه‌ای، از نقطهٔ مبداء ، دیده می‌شود.

از مثلث OA_nA_{n-1} داریم:

$$\sin\varphi_n=\frac{۱}{\sqrt{n}}\ ;\ \operatorname{tg}\varphi_n=\frac{۱}{\sqrt{n-۱}}$$

و روشن است که مقدار دوران مارپیچ، بعد از n چوب کبریت، برابراست با

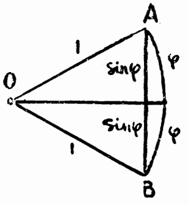
$$\frac{۱}{۲\pi}\left(\varphi_۲+\varphi_۳+\ \cdots\ +\varphi_n\right)$$

حالا ثابت می کنیم که رشتهٔ

$$\varphi_۲+\varphi_۳+\ \cdots\ +\varphi_n+\ \cdots$$

متباعد است و درنتیجه، تمام مارپیچ ، بی‌نهایت دور می‌زند.

برای این منظور ، ابتدا ثابت می کنیم که به‌ازای $۰<\varphi<\frac{\pi}{۲}$ ، این نامساوی برقرار است.



شکل ۳۰

$$\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi$$

نامساوی اول، باتوجه به‌شکل ۳۰ به دست می‌آید:
طول کمان AB ازطول‌وتر آن، بزرگتر است. ازآنجا

$$2\varphi=\widehat{AB}>AB=2\sin\varphi$$

برای اثبات‌نامساوی دوم، به شکل ۳۱ توجه می کنیم.
کمان AB ازخط شکستهٔ ACB کوچکتر است. در نتیجه

$$2\varphi=AB<AC+CB=2\operatorname{tg}\varphi$$

با استفاده ازاین نامساوی‌ها و مقادیری که قبلا برای $\sin\varphi_n$ و $\operatorname{tg}\varphi_n$ به‌دست آوردیم، می‌توانیم تخمین دقیقی برای زاویهٔ φ_n پیدا کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varphi_n<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

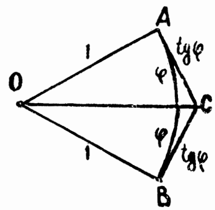
با استفاده از این نامساوی‌ها، می‌توانیم به هر دو پرسش مساله پاسخ دهیم. مقدار این مجموع را بررسی می کنیم:

$$\Phi_n=\varphi_2+\varphi_3+\dots+\varphi_n$$

داریم :

$$\varphi_n>\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

در نتیجه داریم :



شکل ۳۱

$$\varphi_2>2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$\varphi_3>2(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\varphi_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

که از مجموع آن‌ها به دست می‌آید:

$$\Phi_n>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

از این‌جا دیده می‌شود که دنبالهٔ $\{\Phi_n\}$ به سمت بی‌نهایت میل می کند.

ب) برای این که به پرسش دوم مساله پاسخ دهیم، باید رفتار مجموع زیر را بررسی کنیم:

$$\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\dots+\varphi_{n+k}=\Phi_{n+k}-\Phi_n$$

با همان روش فوق می‌توان این تخمین را به دست‌آورد:

$$\Phi_{n+k}-\Phi_n>2(\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+1})$$

از طرف دیگر، با استفاده از نامساوی

$$\varphi_n < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}} = 2(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})$$

این تخمین به‌دست می‌آید :

$$\Phi_{n+k+1}-\Phi_n < 2(\sqrt{n+k}-\sqrt{n-1})$$

می‌خواهیم ببینیم که به ازای چه مقداری از k ، اختلاف $\Phi_{n+k+1}-\Phi_n$ به تقریب برابر 2π می‌شود. به زبان دیگر، چند چوب کبریت باید به n چوب کبریت‌قبلی اضافه کرد، تا یك دور زده شده باشد؟ فرض کنید k به‌نحوی انتخاب شده باشد که داشته باشیم:

$$\Phi_{n+k}-\Phi_n \leqslant 2\pi \text{ ، } \Phi_{n+k+1}-\Phi_n \geqslant 2\pi$$

با استفاده از نامساوی‌های قبلی، می‌توان نوشت:

$$2\pi \geqslant \Phi_{n+k}-\Phi_n > 2(\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+1}) =$$
$$= 2(r_{n+k+1}-r_{n+1}) \text{ ،}$$
$$2\pi \leqslant \Phi_{n+k+1}-\Phi_n < 2(\sqrt{n+k}-\sqrt{n-1}) = 2(r_{n+k}-r_{n-1})$$

به عنوان فاصلهٔ d ، بین دو حلقهٔ متوالی ، می‌توان مقدار $r_{n+k}-r_n$ یا $r_{n+k+1}-r_n$ را در نظر گرفت. یادآوری می کنیم که به ازای مقادیر بزرگ m ، مقادیر r_m و r_{m+1} : خیلی کم با هم اختلاف دارند. در واقع

$$r_{m+1}-r_m = \sqrt{m+1}-\sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} < \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

به این ترتیب، از تخمین‌های بالا نتیجه می‌شود که مقدار $2d$ ، به اندازه‌ای که از $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ بیشتر نیست، با 2π اختلاف دارد.

از این جا دیده می‌شود که فاصله بین دو حلقهٔ متوالی پیچ، به سمت π میل می کند. بنا بر این، به‌ازای‌مقادیر بزرگ n، شبیه به خطی می شود که‌مسیر صوتی را روی صفحه گرام تشکیل می‌دهد.

ooo

۱. حالت $+-$ ممکن نیست. بقیهٔ حالت‌ها ممکن است.

۲. این حالت‌ها ممکن است: $+++$ ؛ $-++$ ؛ $-+-$ ؛ $---$.

۳. الف) همیشه کوتاه‌ترین مرد از بین بلندقدها، بلندتر است از بلندترین مرد از کوتاه قدها. ب) بله، نتیجه تغییرمی‌کند. دراین وضعیت، هردوحالت ممکن است پیش آید.

۴. بازرسی تکلیف‌ها وقتی وضع دشواری خواهد داشت که دست‌کم روی یکی از نیمکت‌ها، هردانش‌آموز، دست‌کم یکی ازمساله‌هارا حل نکرده باشد.

۵: ممکن است.

۶. بیان اول و بیان سوم؛ بیان دوم و بیان چهارم.

۷. قضیه‌های ۱ و ۶ درست و بقیه نادرست‌اند.

۸. الف) بله درست است. ب) نه، ازقضیهٔ فیثاغورث نتیجه نمی‌شود.

۹. قضیه ۸ درگروه اول، قضیه‌های ۲ ، ۳ ، ۶ و ۷ درگروه دوم و قضیه‌های ۴ و ۵ درگروه سوم قرار دارند.

۱۰. $+1$ و -1 . به‌ازای $x=0$، عبارت $\frac{|x|}{x}$ معنا ندارد.

۱۱. الف) a^2 ؛ ب) $a-b$ ؛ ج) $b-a$ ؛ د) $-a$

۱۲. در معادله‌های الف) و ب) ، دو حالت $x\geqslant 0$ و $x<0$ و در معادلهٔ ج) حالت‌های $x<-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ و $x>\frac{1}{2}$ را بررسی کنید.

جواب: الف) $x_1=1$ ، $x_2=-3$ ؛ ب) $x_1=1$ ، $x_2=-1$ ؛ ج) فاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right]$

۱۳. حالت‌های مختلف استقرار نقطه‌های x ، y و 0 را روی محور عددی بررسی می‌کنیم. درحالت الف) تساوی تنها وقتی ممکن است که $x\geqslant 0$ ، $y\geqslant 0$ یا $x\leqslant 0$، $y\leqslant 0$ باشد. درحالت ب) تساوی با شرط $x\geqslant y\geqslant 0$ یا $x\leqslant y\leqslant 0$ به دست می‌آید. بالاخره در حالت ج) حالت تساوی وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $x\geqslant 0$ ، $y\geqslant 0$ یا $x\leqslant 0$ ، $y\leqslant 0$

۱۴. حکم‌های الف) ، ب) و ج) درست وحکم د) نادرست است.

۱۵. هر دوحکم الف) و ب) درست است.

۱۶. الف) محیط بادقت ۴ سانتیمتر. دقت‌مساحت مستطیل، بستگی به‌طول ضلع‌های آن دارد. ب) محیط را بادقت تا ۱٪ ومساحت را بادقت تا ۲٪.

۱۷. الف) $x_۳=\frac{۹}{۸}$ ؛ ب) $x_{۱۰}=\%۵$ ؛ ج) $x_{۹۹۹}=x_{۱۰۰۰}$.

۱۸. الف) $x_۲=x_۳=-۵$ ؛ ب) $x_{۱۰}=۲۰$ ؛ $x_۳=-۲$.

۱۹. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را بی‌کرانه گویند، وقتی که برای هر عدد c بتوان اندیسی برای n پیدا کرد، به‌نحوی‌که داشته باشیم: $|x_n|>c$.

۲۰. مثال : الف) $x_n=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n$ ؛ ب) $x_n=\frac{۱}{n}$ ؛ ج) $x_n=\frac{n-۱}{n}$ ؛

د) $x_n=(-۱)^n\cdot\frac{n-۱}{n}$.

۲۱. ب) مسالهٔ ۲۲ را ببینید.

۲۲. برای دنبالهٔ a) همهٔ فاصله‌های بستهٔ مساله ، تله است. برای دنبالهٔ b) ، فاصله‌های بستهٔ A) و B) ظرف و فاصلهٔ بستهٔ C) تله است. برای دنبالهٔ c) هر سه فاصلهٔ بسته، ظرف است.

۲۳. الف) وجود دارد. ب) وجود ندارد.

۲۴. الف) وجود ندارد. ب) معلوم نیست، ممکن است وجود داشته باشد و ممکن است وجود نداشته باشد.

۲۵. الف) وجود دارد. ب) وجود دارد.

۲۶. مقادیر متناظر k ، دراین جدول داده شده است:

	(a	(b	(c
الف)	۱	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰
ب)	۰	$\sqrt{۹۹۹}$	$\sqrt{۹۹۹۹۹۹}$
ج)	۰	$\frac{۳}{\lg ۲}$	$\frac{۶}{\lg ۲}$
د)	۲	$۲^{۱۰۰۰}$	$۲^{۱۰۰۰۰۰۰}$

۲۷. ب) درست است.

۲۸. ب) نمی‌توان. دنبالهٔ c) ازمسالهٔ ۲۲ را ببینید.

۲۹. ازمساله ۲۳ـب) استفاده کنید.

۳۰. الف) ۰ . ب) ۱ . ج) ۲ . د) دارای حدی نیست. ه) ۱ . و) ۰ . ز) $\frac{۲}{۹}$ ح) حد ندارد. ط) ۰ . ی) دارای حد نیست.

۳۱. ممکن نیست (راهنمائی: مسالهٔ ۲۹ را ببینید).

۳۲. ب) این مطلب را تنظیم کنید که: اگر عدد a ، نقطهٔ حدی دنباله نباشد، چه معنائی دارد؟

۳۳. تعریف حد را با تعریف نقطهٔ حدی مقایسه کنید.

۳۴. الف) ۱ . ب) ۱ ، ۱− . ج) ۰ ، $\pm\sin 1^\circ$ ، $\pm\sin 2^\circ$ ، ... ، $\pm\sin 89^\circ$ ، ± 1 . د) ۰ . ه) نقطهٔ حدی ندارد . و) نقطه‌های حدی ، فاصلهٔ بستهٔ $[0 , 1]$ را پر می‌کنند.

۳۵. حکم درست نیست. مسالهٔ ۲۲-b را ببینید.

۳۶. الف) $x_n \to \infty$. ب) $x_n \to \infty$. ج) $\{x_n\}$ ، کرانه‌دار نیست. د) $x_n \to \infty$. ه) کرانه‌دار است.

۳۷. ۱) شرط برای هر دنباله‌ای درست است. ۲) همهٔ جمله‌های دنباله، برابر a نیستند. ۳) دنباله کرانه‌دار است. ۴) a ، نقطهٔ حدی دنباله نیست. ۵) دنباله به سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند. ۶) عدد a ، حد دنباله نیست. ۷) دنباله کرانه‌دار است. ۹) عدد a، یا یکی ازجمله‌های دنباله است و یا نقطهٔ حدی آن است*.

بقیهٔ شرطها، نفی شرطهای قبلی است، به‌این ترتیب که شرط شمارهٔ k به معنای آن‌است‌که شرط $(17 - k)$ برقرار نیست. مثلاشرط شمارهٔ ۱۰ به‌این معناست‌که شرط‌شمارهٔ ۷ برقرار نیست، یعنی دنباله کرانه‌دار نیست. شرط ۱۵ به معنای برقرار نبودن شرط ۲ است، یعنی همهٔ جمله‌های دنباله، برابر است با a و غیره.

۳۸. الف)

$$+ + + + - \; ; \; x_n = a \; ;$$

$$- + + + - \; ; \; x_n = a + \frac{1}{n} \; ;$$

$$- - + + - \; ; \; x_n = a + 1 + (-1)^n \; ;$$

$$- - + - - \; ; \; x_n = a + n[1 + (-1)^n] \; ;$$

$$- - - + - \; ; \; x_n = a + (-1)^n \; ;$$

$$- - - - + \; ; \; x_n = n \; ;$$

$$- - - - - \; ; \; x_n = n + 1 + n[1 + (-1)^n] \; ;$$

۳۹. ۱) $x_n = \frac{1}{n}$. ۲) $x_n = \frac{n-1}{n}$. ۳) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

۴۰. ثابت کنیدکه اگر دنبالهٔ نامتناهی، دارای بزرگترین جمله نباشد،می‌توان یک‌دنبالهٔ نامتناهی صعودی، ازآن جدا کرد.

۴۱. ثابت کنیدکه دنبالهٔ

۱/۴ ، ۱/۴۱ ، ۱/۴۱۴ ، ۱/۴۱۴۲ ، ۱/۴۱۴۲۲ ، ...

که جمله‌های آن مقادیر تقریبی نقصانی $\sqrt{2}$ را می‌دهند، یکنوا وکرانه‌دار است ودارای

---

*) وقتی که شرط ۹) برقرار شد، نقطه a را نقطه بوسان برای دنبالهٔ (x_n) گویند.

حدی گویا نیست.

۴۲. از نتیجهٔ مسالهٔ ۴۰ واصل بولتسانو ـ وایراشتراس ، استفاده کنید.

۴۳. a) ، b) و c) درست است و حد آنها به ترتیب برابر است با $a+b$ ، $a-b$ و ab.d) بهشرطی درست است‌که داشته باشیم $b\neq 0$ ، و دراین صورت، حد آن برابر است با $\frac{a}{b}$. در حالت $b=0$ و $a\neq 0$ ، حکم d) نادرست است. در حالت $a=b=0$، ممکن است حکم d) درست وممکن است نادرست باشد.

۴۴. a) دارای حد نیست. b) ممکن است حدداشته باشد وممکن است دارای حد نباشد.

۴۵. a و b) ممکن است دارای حد باشند وممکن است‌حد نداشته باشند.

۴۷. ب) ازنامساوی $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ استفاده کنید و ثابت کنیدکه‌دنبالهٔ S_n کرانه‌دار است. ج) به طور جداگانه، دو دنباله‌ای را که از جمله‌های ردیف زوج و جمله‌های رریف فرد تشکیل شده است، بررسی کنید.

۴۹. S_n را مجموع جزئی از n جملهٔ رشتهٔ

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

و C_n را مجموع جزئی از n جملهٔ رشتهٔ

$$a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}+\cdots$$

بگیرید. ثابت کنید؛

$$\frac{1}{2}(C_n-a_1)\leqslant S_{2^{n+1}}-a_1\leqslant C_n$$

۵۰. از مسالهٔ ۴۹ استفاده کنید.

۵۲. ج) به‌این نمونه‌ها توجه کنید: $x_n=n$ و $\{y_n\}$ یکی ازدنباله‌های زیر

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\},\ \left\{\frac{1}{n}\right\},\ \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\},\ \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$$

۵۳. الف) $x_n=\frac{1}{n^2}$ ، $y_n=\frac{1}{n}$. ب) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $y_n=\frac{1}{n}$.

ج) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $y_n=\frac{1}{n^2}$. د) $x_n=\frac{1}{n}$ ، $y_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

۵۴. الف) $\frac{2}{3}$. ب) ۰ . ج) ۱ . د) ۱ .

۵۵. ثابت کنید:

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+Q(n)\leqslant k$$

که درآن $Q(n)$ عبارت است ازیك چند جمله‌ای از درجهٔ n.

۵۶. ازاین اتحاد استفاده کنید:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۵۷. 2^n را به‌صورت $(1+1)^n$ درنظر بگیرید و از دوجمله‌ای نیوتون استفاده کنید.

۵۸. a^n را به صورت $[1+(a-1)]^n$ در نظر بگیرید و از بسط دو جمله‌ای استفاده کنید.

۵۹. از نتیجهٔ مسالهٔ ۵۷ استفاده کنید.

۶۱. الف) ثابت کنیدکه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌طور نزولی یکنوا است. ب) ابتداحالت عدد درست p را بررسی کنید، بعد حالت گویا و سرانجام حالت گنگ آنرا، در حالت اخیر ازنامساوی $l(a)>l(b)$ به‌ازای $a>b$ استفاده کنید.

۶۲. الف) ازفرمول $l(a^p)=pl(a)$ استفاده‌کنید. ب) ثابت‌کنید $l(a)<a-1$.

ج) به‌عنوان e باید عدد $10^{\frac{1}{l(10)}}$ راگرفت.

۶۳. ب) تفاضل‌های:

$$[S_2(a, b)]^2-[S_1(a, b)]^2 \text{ ، } [S_{-1}(a, b)]^2-[S_{-2}(a, b)]^2 \text{ و }$$
$$[S_1(a, b)]^2-[S_{-1}(a, b)]^2$$

را بررسی کنید.

۶۴. الف) ثابت کنیدکه به‌ازای $a\geqslant b$ داریم:

$$a\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\leqslant S_n(a, b)\leqslant a$$

ب) $S_{-n}(a, b)$ را برحسب $S_n(a^{-1}, b^{-1})$ بیان کنید:

ج) ثابت کنیدکه $S_{\frac{1}{n}}(a, b)\geqslant\sqrt{ab}$ و با استفاده ازنامساوی $\ln a<a-1$، حد بالای $\ln S_{\frac{1}{n}}(a, b)$ را تخمین بزنید. پاسخ:

$$\lim_{n\to\infty} S_{\frac{1}{n}}(a, b)=\sqrt{ab}$$

۶۵. این تساوی را ثابت کنید:

$$a_n+na_{n-1}+C_n^2a_{n-2}+C_n^3a_{n-3}+\cdots+na_1+a_0=n!$$

و تعداد روش‌هایی را پیدا کنیدکه به‌ازای آن‌ها، درست k نامه در پاکت خودشان قرار می‌گیرند. ازاین فرمول، برای محاسبهٔ دنبالهٔ مورد نظر $p_n=\frac{a_n}{n!}$ استفاده کنید.

۶۶. مبداء مختصات را در نقطه‌ای که حلزون دوم قرار گرفته است، انتخاب می‌کنیم. محورهای مختصات‌را، درجهت خطهای کاغذ شطرنجی و واحد را، طول یکی از خانه‌ها می‌گیریم. فرض می‌کنیم‌که حلزون اول درلحظهٔ نخست، درنقطهٔ به‌مختصات (a, b) باشد. آن‌وقت، مختصات (a_n, b_n) نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم‌که حلزون بعداز n گام به‌آن رسیده است. ضریب زاویهٔ خطی که در امتداد لولهٔ دوربین قرار گرفته، برابر است با: $k_n=\frac{b_n}{a_n}$. ثابت کنیدکه $\lim_{n\to\infty} k_n=1$

۶۷. a) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=2$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$. c) دنبالهٔ $\{k_n\}$ دارای حدی نیست.

۶۸. از نقطه‌های A_0 و A_n، عمودهایی بر محور Ox فرود می‌آوردیم. P_0 و P_n را، پای این عمودها می‌گیریم. ثابت کنید که مثلث‌های $M_nA_0P_0$ و $M_nA_nP_n$ متشابه‌اند و از آن‌جا طول پاره‌خط M_nP_0 را محاسبه کنید.

پاسخ: نقطهٔ M، وسط پاره‌خط OP_0 است.

۶۹. سه نقطه، روی کاغذ، به عنوان جای مدرسه، سینما و تفریح، انتخاب کنید. نقطهٔ چهارم دلخواهی درنظر بگیرید وخط شکستهٔ $A_1A_2A_3A_4\ldots$ را، که مسیر حرکت توکاست، رسم کنید.

پاره‌خط‌های A_1A_4 ، A_2A_5 ، A_3A_6 وغیره را باهم مقایسه کنید.

۷۰. نقطهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=M$ ، پاره‌خط M_1M_2 را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند.

۷۱. الف) $S_n=\dfrac{1-a^n}{1-a}$ ؛ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{1-a}$ به‌ازای $|a|<1$، درحالتی که داشته باشیم $|a|\geqslant 1$، این رشته متباعد است.

ب) S_n را به‌صورت مجموع n تصاعد هندسی درآورید:

$$S_n=\frac{a-(n+1-na)a^{n+1}}{(1-a)^2}$$

برای $|a|<1$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{(1-a)^2}$ و برای $|a|\geqslant 1$ ، رشتهٔ مفروض متباعد است.

ج) $S_n=1-\dfrac{1}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$

د) $S_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{4}$

ه) ثابت کنید که

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$$

و از آن‌جا نتیجه بگیرید که این رشته، متباعد است.

۷۲. می‌توان آجرها را تا هرارتفاعی، روی‌هم چید. طول هر آجر را مساوی ۱ بگیرید و باروش استقراء ریاضی ثابت کنید که اگر آجر $(n+1)$ ام به‌اندازهٔ $\dfrac{1}{2n}$ نسبت به آجر nام جلو بیاید، آجرها نخواهند افتاد. بعد، از نتیجهٔ مسالهٔ ۷۱ـه) استفاده کنید.

۷۳. $1+\sqrt{2}$.

۷۴. ب) کافی است x_2 را محاسبه کنید.

۷۵. الف) بی‌نهایت مرتبه، دورمبداء می‌چرخد.

ثابت کنید که زاویهٔ φ_n، که تحت آن‌چوب کبریت nام را از نقطهٔ مبداء می‌بینیم،

از $\frac{1}{\sqrt{n}}$ کوچکتر نیست.

ب) فاصلهٔ بین پیچ‌های متوالی به‌سمت π میل می‌کند (طول چوب‌کبریت را واحد می‌گیریم).

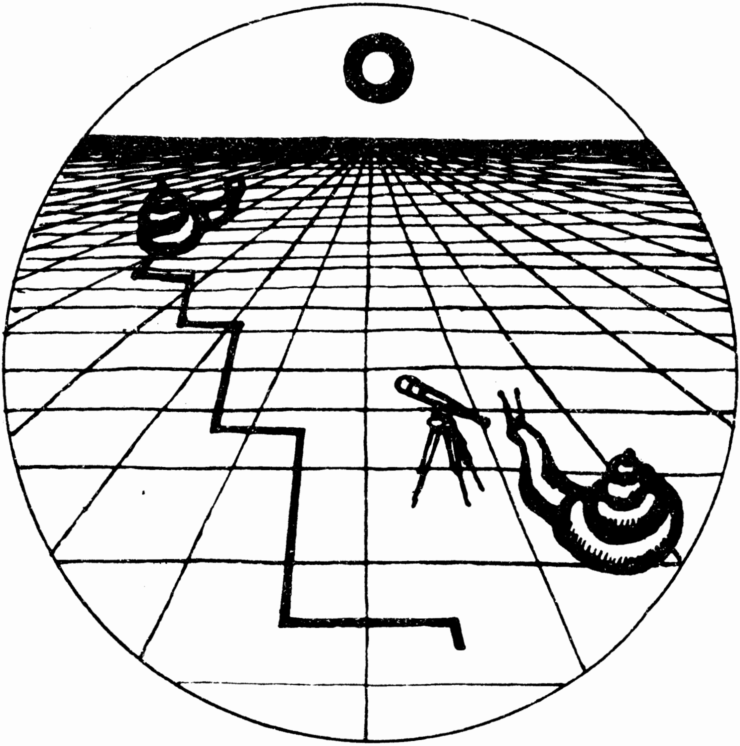
ثابت کنیدکه برای زاویهٔ φ واقع در ربع اول، نامساوی $\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi$ برقرار است و از آن‌جا به نامساوی $\frac{1}{\sqrt{1}}<\varphi_n<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ برسید. از این تخمین نتیجه بگیرید که

$$2(\sqrt{a+k+1}-\sqrt{n+1})<\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\cdots+\varphi_{n+k}<2(\sqrt{n+k-1}-\sqrt{n-1})$$

برای مقدار مفروض n، مقدار k را طوری انتخاب کنیدکه مقدار

$$\varphi_{n+1}+\varphi_{n+2}+\cdots+\varphi_{n+k}$$

هرقدر که ممکن است به 2π نزدیك باشد.



فهرست

پیش‌گفتار ۳

مسأله‌ها ۷

بند ۱ . مسأله‌های مقدماتی ۷

بند ۲ . مسأله‌های مربوط به‌تعریف حد ۱۳

بند ۳ . مسأله‌هایی برای محاسبهٔ حد ۲۲

مسأله‌هایی برای آزمایش خودتان ۳۱

حل مسأله‌ها ۳۳

انتشارات آزاده منتشر می‌کند:

داستانهای ریاضی
ایوان یاکوله‌ویچ دپمان — ترجمهٔ پرویز شهریاری

منحنی‌ها در فضا
دونوان جونسون — » » »

لباچوسکی
و. کاگان — » » »

دستگاههای محدود در ریاضیات
م. اسکات نورتون — » » »

انتشارات آزاده

روبروی دانشگاه تهران، شمارهٔ ۱۳۹۶